# Nachklausur

**Technische Universität Berlin**
**Fakultät II – Institut für Mathematik**
**Dr. G. Nunes dos Reis**

Sommersemester 2012
04. Oktober 2012

**Klausur**
**Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler**

Name: ........................................ Vorname: ........................................

Matr.–Nr.: .................................... Studiengang: ....................................

---

Zur Klausur sind, bis auf einen nicht-programmierbaren Taschenrechner, Lineal und Stifte, keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Handys sind auch verboten! *Eine Zuwiderhandlung ist ein Betrugsversuch.*

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** bzw. **eine Begründung** an.

Mit **Bleistift** oder **Rotstift** geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie alle beschriebenen Blätter, auch Schmierzettel, ab!

**Nicht angemeldete Klausuren gelten als nicht geschrieben und werden nicht korrigiert!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

---

Die Klausur ist mit 50 von 100 Punkten bestanden.

---

**Korrektur**

| Aufgabe Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 26 | 10 | 14 | 17 | 10 | 23 | 100 |
| Wo ist die Antwort? | | | | | | | — |
| Note | | | | | | | |
| Unterschrift | | | | | | | — |

**Klausur Notenschlüssel**

| "100er Mathe Economics" | | |
|---|---|---|
| 1.0 | 98-100 | Sehr gut |
| 1.3 | 93-97 | |
| 1.7 | 87-92 | Gut |
| 2.0 | 81-86 | |
| 2.3 | 75-80 | |
| 2.7 | 70-74 | Befriedigend |
| 3.0 | 65-69 | |
| 3.3 | 59-64 | |
| 3.7 | 53-58 | Ausreichend |
| 4.0 | 50-52 | |
| 5.0 | 00-49 | Mangelhaft |

## Aufgabe 1: Lineare Algebra - Teil I (26 Punkte)

1.a) Betrachten Sie folgendes LGS

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Stellen Sie das LGS in Matrix-Form dar, d.h. in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ und berechnen Sie die Lösung mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. *Bringen Sie die Matrix zumindest in die obere Dreiecksform.*

1.b) Betrachten Sie folgendes LGS in Matrix-Form:

$$B\vec{x} = \vec{c} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sind die Vektoren, die die Zeilen der Matrix $B$ formen, linear unabhängig?

Berechnen Sie Rang$(B)$!

Was kann man über die Anzahl der Lösungen des LGS sagen?

Berechnen Sie die Lösung(en) des LGS $B\vec{x} = \vec{c}$.

1.c) Gegeben ist die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante $Det(C)$ mittels Laplaceschen Entwicklungssatzes, indem Sie nach der $\boxed{\textit{3-ten Zeile}}$ entwickeln.

Ist $C$ invertierbar? Begründen Sie (*kurz*) Ihre Antwort.

## Lösung von Aufgabe 1: 7+10+9 = 26

1.a)

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} -- \\ \texttt{II-4I} \\ \texttt{III-2I} \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} -- \\ \texttt{II/5} \\ \texttt{III+II/5} \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

Also,

$$x_3 = \frac{-4}{-4} = 1; \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2 + 2x_3 = -2 + 2 = 0;$$
$$x_1 = 3 + x_2 - 3x_3 = 3 + 0 - 3 = 0.$$

Also, die Lösung ist: $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$.

1.b)

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & -1 & -3\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 3\\ 3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}--\\ --\\ \texttt{III-2I}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & -3 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 3\\ 9\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}--\\ \texttt{-II}\\ \texttt{III-3II}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ -3\\ 0\end{bmatrix}$$

Also, nach Gauss gibt es eine Null Zeile $\Rightarrow$ Die vektoren sind linear abhängige.

$\text{Rang}(B) = 2$.

Es gibt unendliche viele Lösungen und die sind

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -3 - 5x_3; \quad x_2 = -3 - 3x_3; \quad x_3 \in \mathbb{R}\}$$

alternative

$x_1 = -3 - 5x_3; \quad x_2 = -3 - 3x_3; \quad x_3 \in \mathbb{R}$ oder $x_3$ ist "Frei".

1.c) Entwicklung nach der 3-te Zeile:

$$Det(C) = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot Det(\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}) + (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot Det(\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = -1.$$

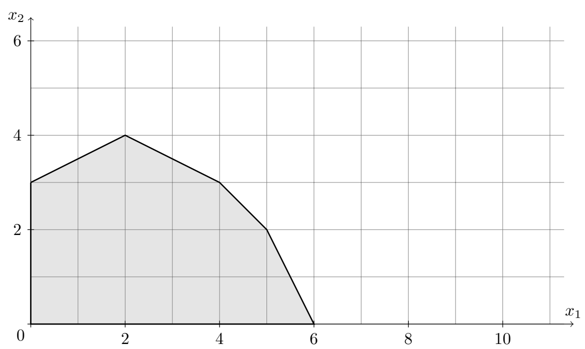
Weil $det(C) = -1 \neq 0$ ist $C$ Invertierbar.

---

## Aufgabe 2: Optimierung - Teil I (10 Punkte)

*Bearbeiten Sie diese Aufgabe auf diesem Aufgabenblatt!*

2.a) Die folgende Grafik zeigt den zulässigen Bereich eines LOPs:




Maximieren Sie die Funktion $F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ im zulässigen Bereich (grau markiert) indem Sie die *graphische Lösungsmethode* anwenden. Nutzen Sie dafür die Skizze!

Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an und vervollständigen Sie sie.

☐ Es gibt eine einzige Lösung:

$F(x^*) =$ __________ und $x^* = ($ _____ , _____ $)$.

☐ Es gibt keine Lösung.

☐ Es gibt unendliche viele Lösungen:

$F(x^*) =$ ___________ und die optimalen Punkte $x^*$ liegen auf der Geraden zwischen Punkt ( ____ , ____ ) und Punkt ( ____ , ____ ).

2.b) Nach Anwendung des Simplex-Algorithmus auf ein LO-Problem ergibt sich folgendes Tableau:

| Basis | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | $-2$ | 1 | 2 | 28 |
| $x_1$ | 1 | $\beta$ | 0 | 1 | $\alpha$ |
| $-c$ | 0 | $\gamma$ | 0 | 1 | 10 |

Geben Sie Werte für $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ an, sodass folgendes gilt:

2.b.i) die aktuelle Lösung ist zulässig, aber der primale Algorithmus ist abgebrochen, weil die Lösung unbeschränkt ist.

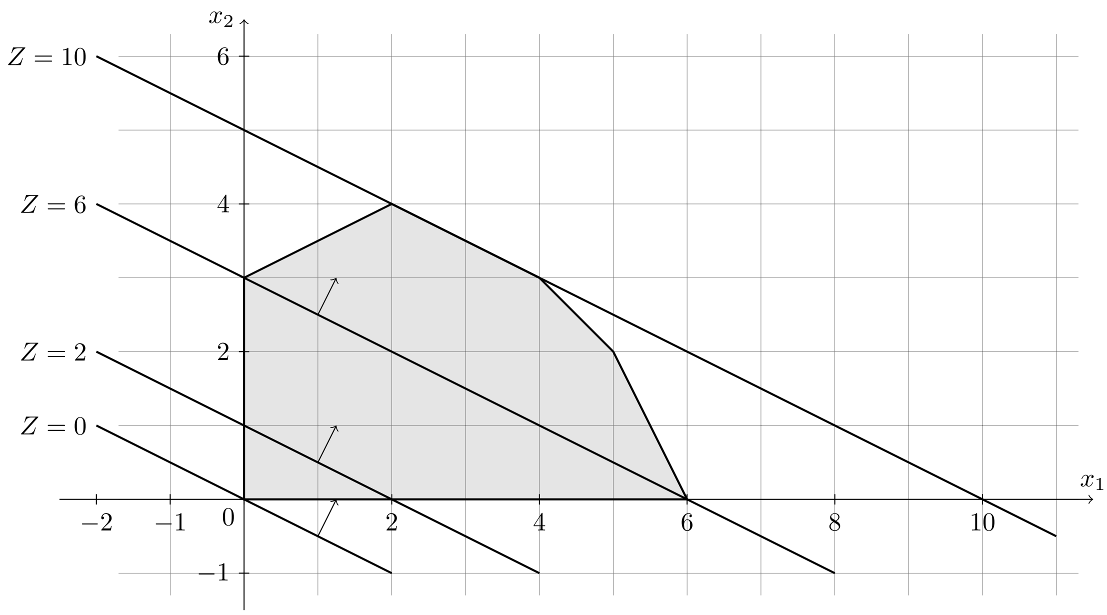
$\alpha =$ $\qquad$ $\beta =$ $\qquad$ $\gamma =$

2.b.ii) die aktuelle Lösung ist zulässig, der primale Algorithmus ist beendet und die Lösung ist optimal, aber es gibt unendliche viele optimale Lösungen.

$\alpha =$ $\qquad$ $\beta =$ $\qquad$ $\gamma =$

**Lösung von Aufgabe 2: 5+2+2**

2.a) läss $Z$ den Wert von $F$ sein, dann $Z = x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow x_2 = Z/2 - x_1/2$. Jetzt wählen wir $Z = 0, 2, \cdots$




■ Es gibt unendliche viele Lösungen: $F(x^*) = 10$ und die optimalen Punkte $x^*$ liegen auf der Geraden zwischen
Punkt $(2, 4)$ und Punkt $(4, 3)$.

BEMERKUNG: Wer Option 1 markiert hat d.h. [■] Es gibt eine einzige Lösung: $F(x^*) = 10$ und Punkt $x^* = (2.4)$ oder Punkt $(4, 3)$.

2.b) 2.b.i) $\alpha \geq 0$, $\beta \leq 0$, $\gamma < 0$, und 2.b.ii) $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma = 0$

## Aufgabe 3: Simplex-Algorithmus - Teil II (14 Punkte)

Bestimmen Sie für das unten angegebene LOP $\boxed{\text{eine } \textit{zulässige Lösung}}$ $\bar{x}$ und den Wert der Zielfunktion $F(\bar{x})$ mit dem Simplex-Algorithmus.

Nutzen Sie dazu die leeren Tableaus und markieren Sie die jeweilige Pivotzeile und -spalte! Kreuzen Sie zwischen den Tableaus an, welchen Algorithmus Sie benutzen.

**Hinweis:** Es ist möglich, dass Sie nicht alle drei Tableaus benï¿½tigen. Sie sollten aber keinesfalls mehr Schritte brauchen.

| Basis | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $-4$ | 0 | $-2$ | 1 | 0 | 0 | $-100$ |
| $y_2$ | 0 | $-1$ | 2 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| $y_3$ | $-1$ | $-2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $-50$ |
| $-c$ | $-2$ | $-1$ | $-3$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

### Lösung von Aufgabe 3: 6+6+2

| Basis | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $-4$ | 0 | $\boxed{-2}$ | 1 | 0 | 0 | $-100$ |
| $y_2$ | 0 | $-1$ | 2 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| $y_3$ | $-1$ | $-2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $-50$ |
| $-c$ | $-2$ | $-1$ | $-3$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

$\downarrow$ Dual

| Basis | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 2 | 0 | 1 | -1/2 | 0 | 0 | 50 |
| $y_2$ | $-4$ | $\boxed{-1}$ | 0 | 1 | 1 | 0 | $-60$ |
| $y_3$ | $-1$ | $-2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $-50$ |
| $-c$ | 4 | $-1$ | 0 | -3/2 | 0 | 0 | 150 |

$\downarrow$ Dual

| Basis | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 2 | 0 | 1 | -1/2 | 0 | 0 | 50 |
| $x_2$ | 4 | 1 | 0 | -1 | -1 | 0 | 60 |
| $y_3$ | 7 | 0 | 0 | -2 | -2 | 1 | 70 |
| $-c$ | 8 | 0 | 0 | -5/2 | -1 | 0 | 210 |

2-mal Dual und Antwort

$$F(\bar{x}) = 210, \qquad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (0, 60, 50, 0, 0, 70)$$

---

## Aufgabe 4: Integration - Teil I (17 Punkte)

1. Berechnen Sie mit partieller Integration und mit Hilfe der Gleichung
$$\frac{2x^2}{2x+1} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2}$$
das Integral
$$\int 2x \ln(2x+1) dx.$$

2. Berechnen Sie das folgende Integral durch Substitution, indem Sie $u = 2e^{\sqrt{x+1}}+1$ substituieren:
$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2e^{\sqrt{x+1}}+1} dx.$$

**Lösung von Aufgabe 4: 9+8**

4.a)

$$\begin{aligned}\int 2x\ln(2x+1)dt &= x^2\ln(2x+1) - \Big(\int x^2 \frac{2}{2x+1}dx\Big)\\ &= x^2\ln(2x+1) - \Big(\int \frac{2x^2}{2x+1}dx\Big)\\ &\Rightarrow \int \frac{2x^2}{2x+1}dx \overset{\text{Tipp}}{=} \int x + \frac{1}{2}\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2}dx\\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln|2x+1| - \frac{x}{2}.\\ &\Rightarrow \int 2x\ln(2x+1)dt = x^2\ln(2x+1) - \Big(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln|2x+1| - \frac{x}{2}\Big) + K\end{aligned}$$

4.b) Für $u = 2e^{\sqrt{x+1}} + 1$ ist

$$du = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot e^{\sqrt{x+1}}dx.$$

Also fählt die $\frac{1}{2}$. Übrigens, für $x=0$ ist $u = 2e+1$ und für $x=3$ ist $u = 2e^{\sqrt{4}} + 1 = 2e^2+1$ .

$$\int_0^3 \frac{2}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2e^{\sqrt{x+1}}+1}dx = \int_{2e}^{2e^2+1}\frac{1}{u}du = [\ln|u|]_{2e+1}^{2e^2+1} = \ln(2e^2+1) - \ln(2e+1).$$

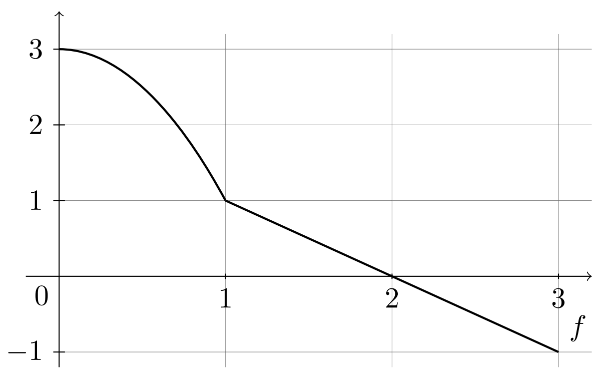
---

## Aufgabe 5: Integration - Teil II (10 Punkte)

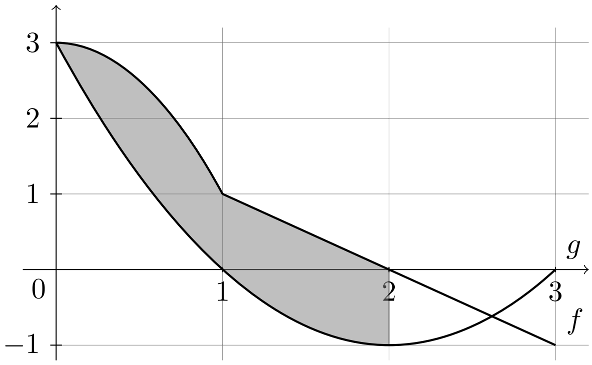
Betrachten Sie die zwei folgenden Funktionen

$$g(x) = x^2 - 4x + 3, \qquad f(x) = \begin{cases} 3 - 2x^2 & , x \le 1 \\ 2 - x & , x \ge 1 \end{cases}.$$

Zu berechnen ist die Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$ im Interval $[0,2]$. Skizzieren Sie die Funktion $g$ im gegebenen Koordinatensystem, markieren die zu berechnende Fläche und berechnen Sie sie anschließend.



**Lösung von Aufgabe 5: 10**




$g(x) = x^2 - 4x + 3 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$. $g(x) = (x-2)^2 - 1$. $g$ ist eine Parabel, $g(0) = 3$ und $g(2) = -1$. $\Rightarrow f$ liegt offenbar oberhalb von $g$ auf $[0, 2]$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 |f(x) - g(x)| dx &= \int_0^2 f(x) - g(x) dx = \int_0^1 f(x) - g(x) dx + \int_1^2 f(x) - g(x) dx \\
&= \int_0^1 3 - 2x^2 - x^2 + 4x - 3 dx + \int_1^2 2 - x - x^2 + 4x - 3 dx \\
&= \int_0^1 -3x^2 + 4x dx + \int_1^2 -x^2 + 3x - 1 dx = \Big[ -x^3 + 2x^2 \ \Big]_0^1 + \Big[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x \Big]_1^2 \\
&= 1 + (-\frac{8}{3} + 6 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1) = \frac{13}{6}
\end{aligned}
$$

---

## Aufgabe 6: Differentialgleichungen (23 Punkte)

6.a) Die Elastizität $\varepsilon_f(x)$ der Funktion $f$ im Punkt $x$ ist durch $\varepsilon_f(x) = 3x$ für $x > 0$ gegeben.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Formel $\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} x$ die Funktion $f$ unter der Bedingung, dass $f(1) = e^4$.

6.b) Betrachten Sie folgende DGL

$$y' + 6xy = x, \qquad y(0) = \frac{7}{6}.$$

• Füllen Sie die Tabelle (mit "Ja" oder "Nein") aus:

| Ist die DGL... | ... linear? | ... separabel? | ... homogen? |
|---|---|---|---|
| Antwort | | | |

• Berechnen Sie die Lösung der DGL, indem Sie *Trennung der Variablen* und *Variation der Konstanten* anwenden.

**Lösung von Aufgabe 6: 5+18**

6.a) Siehe Beispiel 4.3.11 vom Skript!

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} x = 3x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = 3. \tag{1}$$

Hier kann man Trennung der Variablen oder die Formel benutzen. Egal welche, findet man durch Integration (nennen wir $y(x) = f(x)$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 3 dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln |y(x)| = 3x + K \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \tilde{K} e^{3x}.$$

Also, $f(x) = Ce^{3x}$. Weil $f(1) = e^4$ ist, berechnet man die Wert Konstante $C$, d.h. $e^4 = f(1) = Ce^3 \Leftrightarrow C = e^{4-3} = e$ . Die unbekannte Funktion $f$ ist jetzt bekannt und es gilt $f(x) = ee^{3x} = e^{3x+1}$.

6.b) Tabelle:

| Ist die DGL... | ...linear? | ...separabel? | ...homogen? |
|---|---|---|---|
| Antwort | ja | ja/nein | nein |

Lösung ist dann $y(x) = y_h + y_p$.

- Durch Trennung der Variablen kriegt man:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -6x dx \Leftrightarrow \ln|y(x)| = -3x^2 + K \Rightarrow y(x) = Ke^{-3x^2}.$$

- Durch Variation der Konstanten $K \to K(x)$, dann $y_p = K(x)e^{-3x^2}$

Die DGL für $K(x)$ ist

$$\left(K'(x)e^{-3x^2} + K(x)(-6x)e^{-3x^2}\right) + 6x\left(K(x)e^{-3x^2}\right) = x \Leftrightarrow K'(x) = xe^{3x^2}.$$

Integration durch Substitution liefert:

$$\int xe^{3x^2} dx \overset{u=3x^2}{\underset{du=6xdx}{=}} \int \frac{1}{6} e^u du = \frac{1}{6} e^u \overset{u=3x^2}{=} \frac{1}{6} e^{3x^2}.$$

Also $y_p = \frac{1}{6} e^{3x^2} \cdot e^{-3x^2} = \frac{1}{6}$.

- Die Lösung ist dann $y(x) = y_h + y_p = Ke^{-3x^2} + \frac{1}{6}$.

Mit $y(0) = \frac{7}{6}$, haben wir $\frac{7}{6} = y(0) = Ke^0 + \frac{1}{6} = K \Rightarrow K = \frac{6}{6} = 1$.