Technische Universität Berlin Wintersemester 2004/2005
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. G. Bärwolff/C. Mense 11.02.2005

Probeklausur zur LV Numerik für Informatiker

Aufgabe 1 - 6 Punkte

a) Berechnen Sie die LU-Zerlegung (ohne Pivotsuche) der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Lösen Sie mit Hilfe der LU-Zerlegung aus a) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (8,\ 21,\ 35)^T$.

c) Warum ist Pivotisierung bei der LU-Zerlegung für manche nichtsinguläre Matrizen notwendig? Geben Sie ein einfaches Beispiel an, wo Pivotisierung notwendig ist.

Aufgabe 2 - 9 Punkte

Es seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 1 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 2.1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Lösungen x bzw. $\tilde{x}$ der Gleichungssysteme $Ax = b$ bzw. $A\tilde{x} = \tilde{b}$ an.

b) Bestimmen Sie die relativen Fehler in x und b in einer beliebigen Vektornorm.

c) Erklären Sie den verhältnismäßig großen relativen Fehler in x in Bezug zum verhältnismäßig kleinen relativen Fehler in b.

Aufgabe 3 - 9 Punkte

Die Funktion $f(x) = \cos x$ soll im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ interpoliert werden.

a) Ist eine lineare Interpolation mit den Intervallenden als Stützstellen sinnvoll? Bergründen Sie ihre Aussage.

b) Man bestimme das interpolierende Polynom p zu den Stützstellen $-\pi/2$, 0 und $\pi/2$.

c) Mit Hilfe von p bestimme man eine Näherung für $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx$ und vergleiche mit dem exakten Wert.

Aufgabe 4 - 10 Punkte

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y''(t) = -y'(t) + t^2 y(t), \quad y(t_0) = \nu_0, \quad y'(t_0) = \nu_1$.

a) Reduzieren Sie das Anfangswertproblem durch Hinzunahme zusätzlicher Variablen auf ein Anfangswertproblem für ein System erster Ordnung.

b) Führen Sie einen Schritt des expliziten Eulerverfahrens durch. Dabei sei $t_0 = 0, h = 1$ und $\nu_0 = \nu_1 = 1$.

c) Führen Sie einen Schritt des impliziten Eulerverfahrens durch. Dabei sei $t_0 = 0, h = 1$ und $\nu_0 = \nu_1 = 1$.

Aufgabe 5 - 6 Punkte

Bestimmen Sie die Ordnung der Approximation

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx y'(x)\,,$$

d.h. bestimmen Sie das minimale $p \in \mathbb{N}$ mit $\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - y'(x) = O(h^p)$, wobei die 2. Ableitung von $y(x)$ als beschränkt vorausgesetzt wird.