B. Mahr, L. Frantzen, D. Tidhar, S. Thiele, T. Wieczorek — WS 01/02

Klausur TheGI 3

19. Februar 2002

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________

Übung im WS ______

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte:								

Klausurnote:

Aufgabe 1 *(3 Punkte)*

Es seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Form}(P)$. Geben Sie **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

1. Ist S eine Klauselrepräsentation von $\varphi \wedge \psi$ und ist aus S die leere Klausel beweisbar, so gilt $\varphi \Vdash \psi$.
2. Wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \nVdash \varphi$, so ist $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \varphi$ kontradiktorisch.
3. Ist $\varphi \to \psi$ eine Tautologie, so gilt $\varphi \vdash_R \psi$ in jedem Hilbertkalkül $(R, \vdash_R)$.
4. Sind A und B Junktorbasen, so ist auch $A \cap B$ eine Junktorbasis.
5. Ist φ allgemeingültig, so gibt es eine zu φ äquivalente Formel in konjunktiver Normalform, die nur aus einem Zeichen besteht.
6. Wenn für einen Sequenzenkalkül $(S, \vdash_S)$ aus $\varphi \Vdash \psi$ stets $\varphi \vdash_S \psi$ folgt, so ist S vollständig.

Aufgabe 2 *(2+4 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q \in P$.

(a) Ergänzen Sie die folgende Wahrheitstafel! Die Formel dieser Tafel φ ist mit Hilfe der Junktoren aus $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ gebildet, und es ist $\mathrm{Symb}(\varphi) = \{p, q\}$.
In jede Lücke gehört nur **ein** Zeichen! (Es sind mehrere Lösungen möglich).

p	q	$(p$	$\to$	$\ldots$	$\ldots)$	$\ldots$	$\neg$	$(\ldots$	$\to$	$q)$
T	T		F			T	F		T	T
T	F		T		F	F	F		T	F
F	T		T			F	F	F	T	T
F	F		T			F	F		T	F

(b) Sei φ die Formel, deren Wahrheitstafel in **(a)** zu vervollständigen war. Geben Sie sowohl eine disjunktive Normalform für φ als auch eine konjunktive Normalform an.

Aufgabe 3 *(3+4 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q \in P$.

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe des Deduktionstheorems:

$$(p \to \neg q) \to ((q \to p) \to \bot) \Vdash p.$$

(b) Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q, r \in P$. Überprüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens:

$$\{r \to (p \wedge \neg q), q \vee r, \neg p \vee q\} \Vdash \neg r \wedge q.$$

Aufgabe 4 *(3+3 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{Form}(P)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen (bei Widerlegung reicht die Angabe eines Gegenbeispiels):

(a) Wenn $\varphi \Vdash \psi \vee \chi$, dann $\varphi \Vdash \psi$ oder $\varphi \Vdash \chi$.

(b) Wenn $\psi \vee \chi \Vdash \varphi$, dann $\psi \Vdash \varphi$ und $\chi \Vdash \varphi$.

Aufgabe 5 *(2 Punkte)*

Es seien $\Sigma = (S, OP, R)$ eine logische Signatur, X eine zu Σ passende Familien von Variablenmengen, $x \in X$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ sowie $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma(X)$. Geben Sie **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

1. Wenn φ ein Satz ist und für alle $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ ein $\beta : X \to A$ mit $(A, \beta) \models \varphi$ existiert, dann ist φ allgemeingültig.
2. Wenn $\varphi \Vdash \psi$, dann gilt $\mathrm{Mod}_\Sigma(\{\psi, \varphi\}) = \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi)$.
3. Es gilt stets $\mathrm{Strukt}_\Sigma \setminus \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) = \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\varphi)$.
4. Aus $\Phi \subseteq \Psi$ folgt $\mathrm{Mod}_\Sigma(\Psi) \subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi)$.

Aufgabe 6 *(4+2+4 Punkte)*

Gegeben sei die folgende Signatur Σ_{Gr}:

$$\begin{array}{rrcl} \Sigma_{Gr}: & \textbf{sorts} & : & knoten, kanten \\ & \textbf{opns} & : & quelle : kanten \to knoten \\ & & & ziel : kanten \to knoten \\ & \textbf{rels} & : & Pfad : \langle knoten\ \ knoten \rangle \end{array}$$

Ausserdem sei die Familie $X = (X_{knoten}, X_{kanten})$ mit $X_{knoten} = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ und $X_{kanten} = \{k, l, m, k_1, k_2, \ldots\}$ gegeben.

(a) Geben Sie eine Σ_{Gr}-Struktur A an, in der folgende Formeln gültig sind:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 & = & \forall x.\forall y.((\exists k.(quelle(k) = x \wedge ziel(k) = y)) \to Pfad(x, y)), \\ \varphi_2 & = & \forall x.\forall z.((\exists y.(Pfad(x, y) \wedge Pfad(y, z))) \to Pfad(x, z)), \\ \varphi_3 & = & \forall x.\exists k.(quelle(k) = x \vee ziel(k) = x), \\ \varphi_4 & = & \forall x.\forall y.(Pfad(x, y) \vee Pfad(y, x)), \\ \varphi_5 & = & \forall x.\exists y.\neg(x = y). \end{array}$$

(b) Beweisen Sie die Gültigkeit von φ_3 in Ihrer Struktur.

(c) Gegeben sei die Substitution $[\sigma]$ mit $\sigma(x) = quelle(k)$, $\sigma(y) = ziel(l)$, $\sigma(z) = x_1$, $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ für $i \geq 1$, $\sigma(k) = l$, $\sigma(l) = k$, $\sigma(m) = k_1$ und $\sigma(k_i) = k_{i+1}$ für $i \geq 1$. Geben Sie eine Formel φ an mit $x, y, m \in \mathrm{Free}(\varphi)$ und $x, z, l \in \mathrm{Bound}(\varphi)$, so dass $[\sigma]$ <u>nicht</u> zulässig für φ ist (und begründen Sie die Nicht-Zulässigkeit). Bestimmen Sie dann eine zulässige Umbenennung $\langle r\rangle$, so dass $[\sigma]$ zulässig für $\varphi\langle r\rangle$ ist, und geben Sie $\varphi\langle r\rangle[\sigma]$ an.

Aufgabe 7 *(2+2 Punkte)*

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = (S, OP, R)$, wobei $S = \{s\}$, $OP = \{f\}$ mit $f : s \to s$ und $R = \{P\}$ mit $P : \langle s\rangle$. Außerdem seien $x, y \in X_s$. Überprüfen Sie die folgenden Formeln auf Allgemeingültigkeit (jeweils mit Nachweis):

(a) $\varphi = (\neg P(x) \vee (\exists y. f(x) = y)) \vee (P(x) \wedge \neg(\exists y. f(x) = y))$.

(b) $\psi = (\neg P(x) \vee (\exists y. f(x) = y)) \wedge (P(x) \wedge \neg(\exists y. f(x) = y))$.

Aufgabe 8 *(1,5+1,5+2+1 Punkte)*

Gegeben seien $\Sigma = (S, OP, R)$ mit $S = \{s_1, s_2\}$, $OP = \{f\}$ mit $f : s_1 \to s_2$ und $R = \emptyset$ sowie $X_{s_1} = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ und $X_{s_2} = \{u, v, w, u_1, u_2, \ldots\}$.

(a) Formulieren Sie eine Formel φ, so dass die Modelle A von φ genau die Strukturen sind, für die f_A *injektiv* ist, d. h. je zwei verschiedene Elemente aus A_{s_1} haben verschiedene Bilder unter f_A.

(b) Formulieren Sie eine Formel ψ, so dass die Modelle A von ψ genau die Strukturen sind, für die f_A *surjektiv* ist, d. h. jedes Element aus A_{s_2} hat mindestens ein Urbild in A_{s_1} unter f_A.

(c) Zeigen Sie, dass weder $\varphi \Vdash \psi$ noch $\psi \Vdash \varphi$, indem Sie ein $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \setminus \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi)$ und ein $B \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi) \setminus \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi)$ angeben.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \cap \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi) \neq \emptyset$, indem Sie eine Σ-Struktur C mit $C \models \varphi$ und $C \models \psi$ angeben (in einem solchen C ist f_C also bijektiv).