Materialien WS 02/03

1. Test TheGI 3: Lösungen

5. November 2002

Lösungsvorschlag von Alex

Aufgabe 1 *(12 Punkte)*

Gegeben sei die Menge von Aussagensymbolen $P = \{p, q, r, s\}$. Welche der folgenden Zeichenketten sind, wenn die Klammerkonventionen eingehalten werden, Formeln aus Form(P) und welche nicht? Wenn es sich um eine Formel handelt, gib diese noch einmal mit vollständiger Klammerung an. Ist es keine Formel, so begründe, weshalb nicht.

1. $p \wedge q \wedge \neg r \wedge s$
2. $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$
3. $p \bot q$
4. $\bot \leftrightarrow F$
5. $\neg p \vee q \rightarrow \neg q \wedge r$
6. $\neg p \wedge q \vee \neg q \wedge r$

Lösung 1

1. Ist Formel: $(((p \wedge q) \wedge \neg r) \wedge s)$.
2. Ist keine Formel, da $(((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s) \not\equiv (p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)))$.
3. $p \bot q$ ist keine Formel, da $\bot$ nullstelliges Junktorsymbol.
4. Ist keine Formel, denn $F \notin$ Form(P).
5. Ist Formel: $((\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r))$.
6. Ist keine Formel, denn wie bei 2 führen unterschiedliche Klammerungen zu Formeln mit unterschiedlichen Bedeutungen.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Gegeben sei die Menge von Aussagensymbolen $P = \{p, q, r\}$.

(a) Gib zwei verschiedene Belegungen $B_1 : P \rightarrow \{T, F\}$ und $B_2 : P \rightarrow \{T, F\}$ and mit $B_1 \models \neg p$ und $B_2 \models \neg p$.

(b) Gib zwei Belegungen $B_1 : P \rightarrow \{T, F\}$ und $B_2 : P \rightarrow \{T, F\}$ and mit $B_1 \models p \vee q \rightarrow r$ und $B_2 \not\models p \vee q \rightarrow r$.

Lösung 2

(a)

$$\begin{array}{rclcrcl} B_1(p) & = & F & \qquad & B_2(p) & = & F \\ B_1(q) & = & T & & B_2(q) & = & F \\ B_1(r) & = & T & & B_2(r) & = & F \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{lcl} B_1(p) & = & F \\ B_1(q) & = & F \\ B_1(r) & = & F \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} B_2(p) & = & T \\ B_2(q) & = & F \\ B_2(r) & = & F \end{array}$$

Aufgabe 3 *(3+4 Punkte)*

Gegeben sei wieder die Menge von Aussagensymbolen $P = \{p, q, r\}$.

(a) Betrachte die Formel $\varphi = (\bot \vee \top) \vee \bot \leftrightarrow \bot$. Es seien $B_1 : P \to \{T, F\}$ die Belegung mit $B_1(p) = B_1(q) = B_1(r) = F$ und $B_2 : P \to \{T, F\}$ die Belegung mit $B_2(p) = B_2(q) = B_2(r) = T$. Berechne $B_1^*(\varphi)$ und $B_2^*(\varphi)$. Ist φ erfüllbar, tautologisch oder kontradiktorisch? Begründe deine Antwort.

(b) Nun sei ψ die folgende Formel:

$((\neg\bot \to (\top \vee \bot)) \to (\neg\top \wedge \top \leftrightarrow \bot)) \vee ((\bot \to \top) \leftrightarrow \bot \wedge \bot) \vee \neg(\neg\top \leftrightarrow (\bot \wedge \top \to \neg(\top \wedge \bot)))$

Gibt es $B_1 : P \to \{T, F\}$ und $B_2 : P \to \{T, F\}$ mit $B_1 \models \psi$ und $B_2 \not\models \psi$? Begründe deine Antwort mit Hilfe des Koinzidenzlemmas.

Lösung 3

(a)
$$\begin{aligned} B_1^*(\varphi) &= B_1^*((\bot \vee \top) \vee \bot \leftrightarrow \bot) \\ &= f^{\leftrightarrow}(B_1^*(\bot \vee \top) \vee \bot), B_1 * (\bot)) \\ &= f^{\leftrightarrow}(f^{\vee}(B_1^*((\bot \vee \top)), B_1^*(\bot)), F) \\ &= f^{\leftrightarrow}(f^{\vee}(f^{\vee}(B_1^*(\bot), B_1^*(\top)), F), F) \\ &= f^{\leftrightarrow}(f^{\vee}(f^{\vee}(F, T), F), F) \\ &= f^{\leftrightarrow}(f^{\vee}(T, F), F) \\ &= f^{\leftrightarrow}(T, F) \\ &= F \end{aligned}$$

$B_2^*(\varphi) = F$, analog.

Wie man spätestens nach den Berechnungen von B_1^* und B_2^* gesehen hat, hängt die Auswertung der Formel <u>nicht</u> von den Belegungen der Aussagensymbole ab, demzufolge gilt für alle Belegungen: $B^*(\varphi) = F$. Also ist φ kontradiktorisch.

(b) Das Koinzidenzlemma besagt, dass die Gültigkeit einer Formel bei einer gegebenen Belegung nur von der Belegung der Aussagensymbole abhängt, die auch tatsächlich in der Formel vorkommen. In der Formel ψ gibt es aber keine Aussagensymbole. Die Gültigkeit der Formel ψ hängt also <u>nicht</u> von einer gegebenen Belegung ab. Demnach kann es keine zwei Belegungen mit $B_1 \models \psi$ und $B_2 \not\models \psi$ geben, da alle Belegungen zur gleichen Auswertung der Formel führen müssen.

Formal kann man auch wie folgt schliessen: Seien B_1 und B_2 zwei beliebige Belegungen. Es gilt

$$\mathrm{Symb}(\psi) = \emptyset \Rightarrow B_1(p) = B_2(p) \text{ für alle } p \in \mathrm{Symb}(\psi).$$

(Die Gleichheit der Belegungen muss *für alle* $p \in \mathrm{Symb}(\psi)$ gezeigt werden. Da $\mathrm{Symb}(\psi)$ aber leer ist, gibt es kein p für das die Gleichheit der Belegungen gezeigt werden muss.) Es folgt $B_i^*(\psi) = B_j^*(\psi)$, wegen des Koinzidenzlemmas. Insbesondere können B_1 und B_2 die Formel ψ nicht unterschiedlich auswerten, die Antwort auf die Frage in (b) ist also: *Nein.*

Aufgabe 4 *(5 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q \in P$. Überprüfe mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens, ob die folgende Formel φ erfüllbar, tautologisch oder kontradiktorisch ist!

$$\varphi = (p \wedge \neg p \to q \wedge \neg q) \vee q$$

Lösung 4

p	q	$(p$	$\wedge$	$\neg$	p	$\rightarrow$	q	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\vee$	q
T	T	T	F	F	T	T	T	F	F	T	**T**	T
T	F	T	F	F	T	T	F	F	T	F	**T**	F
F	T	F	F	T	F	T	T	F	F	T	**T**	T
F	F	F	F	T	F	T	F	F	T	F	**T**	F

φ ist also tautologisch und erfüllbar.

Aufgabe 5 *(8 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}(P)$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründe deine Antwort.

1. Sind φ und $\neg\varphi$ erfüllbar, so ist φ nicht tautologisch.
2. Sind φ und $\neg\varphi$ erfüllbar, so ist φ nicht kontradiktorisch.
3. Sind φ und ψ erfüllbar, so ist auch $\varphi \wedge \psi$ erfüllbar.
4. Ist $\varphi \wedge \psi$ erfüllbar, so sind φ und ψ beide erfüllbar.

Lösung 5

1. Wahr. Wenn φ tautologisch wäre, dann wäre $\neg\varphi$ kontradiktorisch, also nicht erfüllbar.
2. Wahr. φ kann nicht gleichzeitig erfüllbar und kontradiktorisch sein.
3. Falsch. Gegenbeispiel: Sei $\varphi = p$ und $\psi = \neg p$. Dann sind φ und ψ erfüllbar, und $\varphi \wedge \psi = p \wedge \neg p$ ist kontradiktorisch.
4. Wahr. Folgt aus der Definition. Wenn $\varphi \wedge \psi$ erfüllbar, dann gibt es eine Belegung B_1 mit $B_1^*(\varphi \wedge \psi) = T$. Nach der Definiton B^* ist dann $B_1^*(\varphi) = T$ und $B_1^*(\psi) = T$, also sind beide Formeln erfüllbar.