B. Mahr, D. Tidhar, T. Wieczorek — WS 02/03

2. Test TheGI 3

10. Dezember 2002

Loesungsvorschlaege

Bei allen Aufgaben wird die Notation des Buches und der Vorlesung gebraucht!

Aufgabe 1 *(6 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q, r, s \in \text{Form}(P)$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründe deine Antwort.

$$(1) \quad \neg p \quad \Vdash \quad p \to q$$

$$(2) \quad \neg q \quad \Vdash \quad p \to q$$

$$(3) \quad \bot \quad \Vdash \quad ((p \vee q) \to (r \wedge s)) \leftrightarrow (\neg p \vee s)$$

$$(4) \quad \top \quad \Vdash \quad \neg p$$

Lösung 1

(1) **Whar**. Jede Belegung, die $\neg p$ erfüllt, erfüllt p nicht, und daher muss aber $p \to q$ erfüllen.

(2) **Falsch.** Sei $B : P \to \{T, F\}$ mit $B(p) = T$ und $B(q) = F$.
Es gilt $B \models \neg q$, aber nicht $B \models p \to q$.

(3) **Wahr.** Es gibt keine Belegung, die das Falsum erefüllt, und daher gilt diese Folgerung, unabhängig von der Konklusion.

(4) **Falsch.** Sei $B : P \to \{T, F\}$ mit $B(p) = T$. Es gilt $B \models \top$, aber nicht $B \models \neg p$

Aufgabe 2 *(6 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi, \chi \in \text{Form}(P)$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründe deine Antwort.

$$(1) \quad \psi \equiv \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi \wedge \psi \Vdash \chi.$$

$$(2) \quad \varphi \wedge \psi \Vdash \chi \quad \Rightarrow \quad \psi \equiv \chi.$$

$$(3) \quad \{\varphi, \psi\} \equiv \{\chi\} \quad \Rightarrow \quad \models \varphi \wedge \psi \to \chi.$$

$$(4) \quad \models \varphi \wedge \psi \to \chi \quad \Rightarrow \quad \{\varphi, \psi\} \equiv \{\chi\}.$$

Lösung 2
(1) **Wahr.** Sei $B : P \to \{T, F\}$. Wenn $B \models \varphi \wedge \psi$ gilt, muß auch $B \models \psi$ gelten, und da $\psi \equiv \chi$, muß auch $B \models \chi$ gelten.

(2) **Falsch.** Gegenbeispiel: Seien $\varphi := \bot$, $\psi := \bot$ und $\chi := \top$.

(3) **Wahr.** Wenn $\{\varphi, \psi\} \equiv \{\chi\}$, so gilt auch $\{\varphi, \psi\} \Vdash \{\chi\}$, und nach Deduktionstheorem gilt auch $\models \varphi \wedge \psi \to \chi$.

(4) **Falsch.** Gegenbeispiel: Seien $\varphi := \bot$, $\psi := \bot$ und $\chi := \top$.

Aufgabe 3 *(8 Punkte)*
Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q, r \in \mathrm{Form}(P)$. Sind die folgenden Formeln in DNF, KNF, sowohl in DNF als auch in KNF oder weder noch?

1. $p \vee \neg q \vee r$
2. $\neg(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$
3. $\top$
4. $\bot$
5. $(\neg q \wedge p) \vee \bot$
6. $(\neg q \wedge p) \vee \top$
7. $p \wedge (\neg r \vee q)$
8. $\neg p$

Lösung 3

1. Sowohl DNF als auch KNF.
2. Weder DNF noch KNF.
3. Sowohl DNF als auch KNF.
4. Sowohl DNF als auch KNF.
5. Weder DNF noch KNF.
6. DNF.
7. KNF.
8. Sowohl DNF als auch KNF.

Aufgabe 4 *(3 Punkte)*

(a) Gib ein Beispiel an für eine Junktorbasis A, so dass $A \setminus \{\vee\}$ auch Junktorbasis ist.

(b) Gib ein Beispiel an für eine Junktorbasis B, so dass $B \setminus \{\vee\}$ keine Junktorbasis mehr ist.

(c) Gib ein Beispiel für eine Menge von Junktoren C, sodass C keine Junktorbasis ist und $C \cup \{\vee\}$ auch nicht.

Lösung 4

(a) $A = \{\neg, \wedge, \vee\}$

(b) $B = \{\neg, \vee\}$

(c) $C = \{\wedge\}$

Aufgabe 5 *(8 Punkte)*

Sei HK der vollständige und korrekte Hilbertkalkül aus der Vorlesung. Folgende Beweisfolge zeigt, dass $\{\neg\varphi \to \neg\psi, \psi\} \vdash_{\mathsf{HK}} \varphi$ für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}(P)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \neg\varphi \to \neg\psi \\
\varphi_2 &= \psi \\
\varphi_3 &= (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi) \\
\varphi_4 &= \psi \to \varphi \\
\varphi_5 &= \varphi
\end{aligned}$$

Gib für jede Formel die Begründung an, die zeigt, dass es sich wirklich um eine Beweisfolge aus HK mit $\{\neg\varphi \to \neg\psi, \psi\}$ handelt. Bei jeder Regelanwendung ist dabei auch die Substitution anzugeben.

Lösung 5

$\varphi_1 = \neg\varphi \to \neg\psi$	Voraussetzung
$\varphi_2 = \psi$	Voraussetzung
$\varphi_3 = (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	ϱ_3, mit $\sigma(p) := \varphi$ und $\sigma(q) := \psi$
$\varphi_4 = \psi \to \varphi$	ϱ_4, angewandt auf φ_1 und φ_3, mit $\sigma(p) := \varphi_1$ und $\sigma(q) := \varphi_4$
$\varphi_5 = \varphi$	ϱ_4, angewandt auf φ_2 und φ_4, mit $\sigma(p) := \varphi_2$ und $\sigma(q) := \varphi_5$

Aufgabe 6 *(5 Punkte)*

Sei SK der vollständige und korrekte Sequenzenkalkül aus der Vorlesung. Folgender Beweisbaum zeigt, dass $\{\varphi \vee \neg\psi, \psi\} \vdash_{\mathsf{SK}} \varphi$ für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}(P)$:

$$\dfrac{\dfrac{}{\{\varphi,\psi\} \rhd \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\{\psi,\neg\psi\} \rhd \psi} \quad \dfrac{}{\{\psi,\neg\psi\} \rhd \neg\psi}}{\{\psi,\neg\psi\} \rhd \varphi}}{\{\varphi \vee \neg\psi, \psi\} \rhd \varphi}$$

Vervollständige den Baum, indem du an jeden Konklusionsstrich schreibst, welche Regel angewendet wurde.

Lösung 6

$$\dfrac{\dfrac{}{\{\varphi,\psi\} \rhd \varphi}\,\varrho_1 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\{\psi,\neg\psi\} \rhd \psi}\,\varrho_1 \quad \dfrac{}{\{\psi,\neg\psi\} \rhd \neg\psi}\,\varrho_1}{\{\psi,\neg\psi\} \rhd \varphi}\,\varrho_3}{\{\varphi \vee \neg\psi, \psi\} \rhd \varphi}\,\varrho_7$$

Aufgabe 7 *(4 Punkte)*

Sei $(R, \vdash_R)$ ein Hilbert- oder Sequenzenkalkül, der vollständig und korrekt ist. Welche dieser beiden Eigenschaften (also Vollständigkeit, Korrektheit) geht möglicher Weise verloren und welche bleibt auf jeden Fall erhalten, wenn

(a) aus R eine Regel ϱ entfernt wird?

(b) zu R eine Regel ϱ hinzugenommen wird?

Lösung 7

(a) R bleibt in jedem Fall korrekt, ist aber eventuell nicht mehr vollständig.

(b) R bleibt in jedem Fall vollständig, ist aber eventuell nicht mehr korrekt.