B. Mahr, D. Tidhar, T. Wieczorek WS 02/03

3. Test TheGI 3

21. Januar 2003

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________

Tutorium: ________

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7
Punkte:							

Gesamtpunkte:

Bei allen Aufgaben wird die Notation des Buches und der Vorlesung gebraucht!

Allen Aufgaben liegt die folgende Signatur Σ zu Grunde:

$$\begin{array}{rcrl} \textbf{sorts} & : & s_1, s_2 & \\ \textbf{opns} & : & c: & \to s_1 \\ & & f: & s_1 \to s_2 \\ \textbf{rels} & : & P: & \langle s_2 s_1 \rangle \end{array}$$

Gegeben sei außerdem die zu Σ passende Familie $X = (X_{s_1}, X_{s_2})$ von Variablenmengen mit $X_{s_1} = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ und $X_{s_2} = \{u, v, w, u_1, u_2, \ldots\}$.

Aufgabe 1 *(6 Punkte)*

Welche der folgenden Zeichenketten sind Formeln aus $\mathrm{Form}_\Sigma(X)$?

1. $\forall x.\forall u.(f(x) \vee P(u, x))$
2. $\forall x.\exists u.\neg f(x) = u$
3. $\exists x.\forall u.P(u, x) = f(x)$
4. $f(x) = w$
5. $(\forall x.P(f(x), c)) \vee (\forall x.(x = c \to P(f(x), c)))$
6. $\forall c.c = c$

Hinweis zur Bearbeitung der 1. Aufgabe: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen, und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Aufgabe 2 *(2,5 Punkte)*

Gib eine Formel $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ an mit $x \in \mathrm{Free}(\varphi)$ und $x, u \in \mathrm{Bound}(\varphi)$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

Gib eine Σ-Struktur A an.

Aufgabe 4 *(16 Punkte)*

Gib für jeden Punkt jeweils ein $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ an, sodass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Wie sehen die Modellklassen dieser Formeln aus?

1. Für jedes $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ und alle $\beta : X \to A$ gilt $(A, \beta) \models \varphi$.

2. Für jedes $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ existiert ein $\beta : X \to A$ mit $(A, \beta) \not\models \varphi$.

3. Für jedes $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ und alle $\beta : X \to A$ gilt $(A, \beta) \not\models \varphi$.

4. Für jedes $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ existiert ein $\beta : X \to A$ mit $(A, \beta) \models \varphi$, aber φ ist nicht allgemeingültig.

Aufgabe 5 *(6 Punkte)*

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$. Sind die angegebenen Folgerungen wahr oder falsch? Begründe deine Antwort mit Hilfe des Modellklassenbegriffs.

1. $\varphi \Vdash \varphi \vee \psi$.

2. $\varphi \wedge \psi \Vdash \varphi$.

3. $\varphi \Vdash \neg\varphi$.

4. $\psi \Vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

Aufgabe 6 *(2,5 Punkte)*

Gib zur Formel $\varphi = \exists x. f(x) = u$ ein $\psi \in \mathrm{Sent}_\Sigma(X)$ an mit $\varphi \equiv \psi$.

Aufgabe 7 *(3 Punkte)*

(a) Wie sieht $\mathrm{Th}_\Sigma(x = x)$ aus?

(b) Wie sieht $\mathrm{Th}_\Sigma(x \neq x)$ aus?