Materialien | WS 02/03

3. Test TheGI 3: Lösungen

21. Januar 2003

Lösungsvorschlag von Tina

Allen Aufgaben liegt die folgende Signatur Σ zu Grunde:

$$\begin{array}{rcrl} \textbf{sorts} & : & s_1, s_2 & \\ \textbf{opns} & : & c: & \to s_1 \\ & & f: & s_1 \to s_2 \\ \textbf{rels} & : & P: & \langle s_2 s_1 \rangle \end{array}$$

Gegeben sei außerdem die zu Σ passende Familie $X = (X_{s_1}, X_{s_2})$ von Variablenmengen mit $X_{s_1} = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ und $X_{s_2} = \{u, v, w, u_1, u_2, \ldots\}$.

Aufgabe 1 *(6 Punkte)*

Welche der folgenden Zeichenketten sind Formeln aus $\mathrm{Form}_\Sigma(X)$?

1. $\forall x.\forall u.(f(x) \vee P(u,x))$
2. $\forall x.\exists u.\neg f(x) = u$
3. $\exists x.\forall u.P(u,x) = f(x)$
4. $f(x) = w$
5. $(\forall x.P(f(x),c)) \vee (\forall x.(x = c \to P(f(x),c)))$
6. $\forall c.c = c$

Hinweis zur Bearbeitung der 1. Aufgabe: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen, und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Lösung 1

1. Ist keine Formel.
2. Ist Formel.
3. Ist keine Formel.
4. Ist Formel.
5. Ist Formel.
6. Ist keine Formel.

Aufgabe 2 *(2,5 Punkte)*

Gib eine Formel $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ an mit $x \in \mathrm{Free}(\varphi)$ und $x, u \in \mathrm{Bound}(\varphi)$.

Lösung 2

Zum Beispiel: $(\forall x.\, x = x) \vee (\exists u.\, f(x) = u)$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Gib eine Σ-Struktur A an.

Lösung 3
Zum Beispiel:

$$\boxed{\begin{array}{l} A: \\ \qquad A_{s_1} = \{0\} \\ \qquad A_{s_2} = \{1\} \\ \hline \qquad c_A = 0 \\ \qquad f_A : \{0\} \to \{1\},\ f_A(0) = 1 \\ \hline \qquad P_A = \emptyset \subseteq \{1\} \times \{0\} \end{array}}$$

Aufgabe 4 *(16 Punkte)*
Gib für jeden Punkt jeweils ein $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ an, sodass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Wie sehen die Modellklassen dieser Formeln aus?

1. Für jedes $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ und alle $\beta : X \to A$ gilt $(A, \beta) \models \varphi$.
2. Für jedes $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ existiert ein $\beta : X \to A$ mit $(A, \beta) \not\models \varphi$.
3. Für jedes $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ und alle $\beta : X \to A$ gilt $(A, \beta) \not\models \varphi$.
4. Für jedes $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ existiert ein $\beta : X \to A$ mit $(A, \beta) \models \varphi$, aber φ ist nicht allgemeingültig.

Lösung 4

1. $\varphi = \forall x.x = x$. Dann ist $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) = \mathrm{Strukt}_\Sigma$, (da φ allgemeingültig).
2. $\varphi = \forall x.x \neq x$. Dann ist $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) = \emptyset$, (da φ kontradiktorisch).
3. Wieder leistet $\varphi = \forall x.x \neq x$ das Gewünschte.
4. $\varphi = x = y$. Dann ist $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) = \{A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma : |A_{s_1}| = 1\}$.

Aufgabe 5 *(6 Punkte)*
Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$. Sind die angegebenen Folgerungen wahr oder falsch? Begründe deine Antwort mit Hilfe des Modellklassenbegriffs.

1. $\varphi \Vdash \varphi \vee \psi$.
2. $\varphi \wedge \psi \Vdash \varphi$.
3. $\varphi \Vdash \neg\varphi$.
4. $\psi \Vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

Lösung 5

1. Die Folgerung stimmt: Ist $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi)$ so gilt $(A, \beta) \models \varphi$ für alle β, was nach Definition der Disjunktion $(A, \beta) \models \varphi \vee \psi$ für alle β impliziert. Also $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi \vee \psi)$ und damit $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi \vee \psi)$.
2. Die Folgerung stimmt: Sei $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi \wedge \psi)$, dann gilt $(A, \beta) \models \varphi \wedge \psi$ für alle β, also auch $(A, \beta) \models \varphi$ für alle β nach Definiton der Konjunktion. Also $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi)$ und somit $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi \wedge \psi) \subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi)$.

3. Die Folgerung stimmt nur, wenn φ kontradiktorisch ist, denn dann folgen alle Formeln aus φ, da die leere Menge in jeder Modellklasse enthalten ist. Ansonsten existiert ein $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ mit $A \models \varphi$, also $(A, \beta) \models \varphi$ für alle β. Das bedeutet aber nach Definition der Negation, dass $(A, \beta) \not\models \neg\varphi$ und das sogar für alle β. Auf jeden Fall gilt dann $A \not\models \neg\varphi$ und daher $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \not\subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\varphi)$.

4. Die Folgerung stimmt: $\varphi \vee \neg\varphi$ ist allgemeingültig nach Satz 19.4.7, daher gilt $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi \vee \neg\varphi) = \mathrm{Strukt}_\Sigma$, diese Modellklasse enthält offensichtlich sämtliche Modellklassen.

Aufgabe 6 *(2,5 Punkte)*

Gib zur Formel $\varphi = \exists x.f(x) = u$ ein $\psi \in \mathrm{Sent}_\Sigma(X)$ an mit $\varphi \equiv \psi$.

Lösung 6

$\psi = \forall u.\exists x.f(x) = u$.

Aufgabe 7 *(3 Punkte)*

(a) Wie sieht $\mathrm{Th}_\Sigma(x = x)$ aus?

(b) Wie sieht $\mathrm{Th}_\Sigma(x \neq x)$ aus?

Lösung 7

(a) Da $x = x$ eine allgemeigültige Formel ist, gilt $\mathrm{Th}_\Sigma(x = x) = \{\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X) : \varphi \text{ ist allgemeingültig}\}$.

(b) Da $x \neq x$ kontradiktorisch ist, gilt $\mathrm{Th}_\Sigma(x \neq x) = \mathrm{Form}_\Sigma(X)$.