B. Mahr, D. Tidhar, T. Wieczorek	WS 02/03

4. Test TheGI 3

11. Februar 2003

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________

Tutorium: ________

Aufgabe:	1	2	3	4
Punkte:				

Gesamtpunkte:

Bei allen Aufgaben wird die Notation des Buches und der Vorlesung gebraucht!

Aufgabe 1 *(6 Punkte)*

Gegeben sei die folgende Signatur Σ:

$$\begin{array}{rcrl} \textbf{sorts} & : & s_1, s_2 & \\ \textbf{opns} & : & a: & \to s_2 \\ & & h: & s_2 \to s_1 \\ \textbf{rels} & : & Q: & \langle s_1 s_2 \rangle \end{array}$$

Gegeben sei außerdem die zu Σ passende Familie $X = (X_{s_1}, X_{s_2})$ von Variablenmengen mit $X_{s_1} = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ und $X_{s_2} = \{u, v, w, u_1, u_2, \ldots\}$.

Welche der folgenden Zeichenketten sind Formeln aus $\mathrm{Form}_\Sigma(X)$?

1. $\exists u.(h(u) \leftrightarrow h(a))$
2. $(\exists x.Q(x, u)) = (\forall u.h(u) = x)$
3. $\forall x.(x \wedge x \to \neg u)$
4. $\forall a.\exists x.h(a) = x$
5. $\forall u.(h(u) = u \leftrightarrow \exists x.h(u) = x)$
6. $Q(a, h(a))$

Hinweis zur Bearbeitung der 1. Aufgabe: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen, und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Aufgabe 2 *(3+3+6 Punkte)*

Gegeben sei wieder die Signatur Σ aus Aufgabe 1 sowie die dort angegebenen Variablenmengen. Betrachte die Formel

$$\varphi = \forall x.\exists x_1.(Q(x, a) \to (h(u) = x \vee h(a) = y)).$$

(a) Gib eine Substitution σ_1 an, die zulässig für φ ist und bestimme $\varphi[\sigma_1]$.

(b) Gib eine Substitution σ_2 an, die nicht zulässig für φ ist und begründe, warum sie es nicht ist.

(c) Betrachte die folgenden gebundenen Umbenennungen r_i für $i \in \{1, 2, 3\}$. Sind sie zulässig für φ oder nicht? Bei Zulässigkeit gib $\varphi\langle r_i \rangle$ an, bei nicht Zulässigkeit ist diese zu begründen!

(i) $r_1(x) = z$, $r_1(z) = x$, $r_1(b) = b$ für alle $b \in X_{s_1} \cup X_{s_2}$ mit $b \neq x, z$.

(ii) $r_2(x) = y$, $r_2(y) = x$, $r_2(b) = b$ für alle $b \in X_{s_1} \cup X_{s_2}$ mit $b \neq x, y$.

(iii) $r_3(b) = z$ für alle $b \in X_{s_1}$ und $r_3(b) = u$ für alle $b \in X_{s_2}$.

Aufgabe 3 *(12 Punkte)*

Es seien P eine Menge von Aussagensymbolen, $\Phi \subseteq \text{Form}(P)$ und $\varphi, \psi, \chi, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \text{Form}(P)$. Gib **mit Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind.

1. $\varphi \wedge \psi \to \chi$ ist erfüllbar genau dann, wenn $\{\varphi, \psi\} \Vdash \chi$.

2. Die Sequenz $\{\varphi \vee \psi\} \rhd \varphi$ ist korrekt.

3. Die folgende Hilbertregel ist korrekt:

$$\frac{\varphi, \quad \neg\varphi}{\psi}$$

4. Sei A eine Junktorbasis. Dann ist $\{\wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow, \top, \bot\} \setminus A$ keine Junktorbasis.

5. Sind $(R_1, \vdash_{R_1})$ und $(R_2, \vdash_{R_2})$ zwei korrekte Hilbertkalküle, so gilt stets $\Phi \vdash_{R_1} \varphi \Rightarrow \Phi \vdash_{R_2} \varphi$.

6. Aus $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, $\psi_1 \equiv \psi_2$ und $\varphi_1 \Vdash \psi_1$ folgt $\varphi_2 \Vdash \psi_2$.

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Es seien $\Sigma = (S, OP, R)$ eine logische Signatur, X eine zu Σ passende Familien von Variablenmengen und $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$. Gib **mit Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind.

1. Es gelte, dass für alle $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ ein $\beta : X \to A$ mit $(A, \beta) \not\models \varphi$ existiert. Dann gilt in jedem korrekten prädikatenlogischen Hilbertkalkül $(R, \vdash_R)$, dass $\varphi \vdash_R \psi$ für alle $\psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$.

2. Es gelte, dass für alle $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ ein $\beta : X \to A$ mit $(A, \beta) \not\models \varphi$ existiert. Dann gilt in jedem vollständigen prädikatenlogischen Hilbertkalkül $(R, \vdash_R)$, dass $\varphi \vdash_R \psi$ für alle $\psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$.

3. Es gibt ein $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ mit $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\varphi) \neq \mathrm{Strukt}_\Sigma$.

4. Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ gibt es ein $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ mit $A \models \varphi$.

5. Wenn φ kontradiktorisch, so gilt stets $(A, \beta) \not\models \varphi$ für alle $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ und alle $\beta : X \to A$.