B. Mahr, S. Bab, T. Noll WS 03/04

Klausur TheGI 3

21. Februar 2004

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________

Übung im WS ________

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte:									

Summe: **Klausurnote:**

Punkte: Insgesamt sind in der Klausur 55 Punkte zu erreichen, wovon 5 Punkte als Bonuspunkte behandelt werden, so daß man mit Erreichen von 50 Punkten bereits 100% der Klausur bestanden hat. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 25 Punkte erreicht werden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte beginnt jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreibt auf jedes von Euch benutzte Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer.

Hilfsmittel: Als Hilfsmittel ist ausschließlich ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt in eigener Handschrift (keine Kopien) zugelassen, keine Mobiltelefone, PDAs, Bücher, Hefter, Kopien, etc.

Hinweis: Verschafft Euch zunächst einen Überblick über alle Aufgaben und beginnt mit der Aufgabe, die Euch am wenigsten aufwendig erscheint.

Aufgabe 1 *(3 Punkte)*

Es seien $P = \{p, q\}$ eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi \in \text{Form}(P)$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

1. Wenn $(H, \vdash_H)$ ein korrekter Hilbertkalkül ist und $\varphi \Vdash \psi$ gilt, so gilt auch $\neg\psi \vdash_H \neg\varphi$.
2. Wenn die Folgerung $\{\varphi, \psi\} \Vdash \chi$ gilt, dann gelten auch die Folgerungen $\varphi \Vdash \chi$ und $\psi \Vdash \chi$.
3. Die folgenden Aussagen sind beide richtig:
$$\begin{array}{lcl} p \wedge \neg p & \Vdash & q \to (q \to p) \\ p \vee \neg p & \Vdash & p \to (q \to p) \end{array}$$
4. Wenn $\varphi \Vdash \psi$ gilt, so gilt $B^*(\varphi \to \psi) = T$ für alle Belegungen $B : P \to \{T, F\}$.
5. Die Menge $\{\wedge, \vee\}$ bildet eine Junktorbasis für die Menge der aussagenlogischen Formeln $Form(P)$.
6. $\dfrac{\{p, \neg q\} \quad \{\neg p, q\}}{\emptyset}$ ist eine korrekte Anwendung der Resolventenregel auf die Klauseln $\{p, \neg q\}$ und $\{\neg p, q\}$.

Aufgabe 2 *(3.5+2+2 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen sowie $p, q \in P$.

(a) Ergänze bitte die folgende Wahrheitstafel! In der Formel dieser Wahrheitstafel (im folgenden als φ bezeichnet) fehlt noch ein zweistelliger Junktor aus $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und vier Vorkommnisse von Aussagensymbolen aus $\mathrm{Symb}(\varphi) = \{p, q\}$, d.h. in jede Lücke gehört nur **ein** Zeichen! Ergänze bitte **alle** der 26 fehlenden Wahrheitswerte.

p	q	(	...	$\rightarrow$	...	)	$\leftrightarrow$	(	$\neg$	...	...	...	)
T	T						F						
T	F			F			F						
F	T						T					T	
F	F						F						

(b) Sei φ die Formel aus der Wahrheitstafel in Teilaufgabe (a). Gib sowohl eine konjunktive als auch eine disjunktive Normalform für φ an.

(c) Entscheide, ob die folgenden Formeln in DNF, in KNF oder in DNF und KNF zugleich sind. Bei diesem Aufgabenteil werden für falsche Antworten *keine* Punkte abgezogen.

$$\chi_1 = (p \vee \neg r \vee \neg p \vee r)$$
$$\chi_2 = \bot \wedge (p \wedge q)$$

Aufgabe 3 *(3+2 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q \in P$.

(a) Untersuche bitte, ob die nachstehende Folgerungsbehauptung stimmt oder nicht stimmt und gib eine stichhaltige Argumentation für Dein Ergebnis an.

$$p \rightarrow (\neg q \rightarrow p) \Vdash p \rightarrow \neg p.$$

(b) Angenommen, für einen Hilbertkalkül $(H, \vdash_H)$ gilt

$$p \rightarrow (\neg q \rightarrow p) \vdash_H p \rightarrow \neg p.$$

Kann $(H, \vdash_H)$ korrekt sein? Kann $(H, \vdash_H)$ vollständig sein? Begründe bitte Deine Antworten schlüssig.

Aufgabe 4 *(5+2 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi, \chi, \kappa \in \mathrm{Form}(P)$.

(a) Beweise oder widerlege (durch Angabe eines Gegenbeispiels) die folgende Behauptung: *Wenn sowohl $\varphi \wedge \chi \Vdash \kappa$ als auch $\psi \wedge \chi \Vdash \kappa$ gilt, so gilt auch $(\varphi \vee \psi) \wedge \chi \Vdash \kappa$.*

(b) Ist die folgende Sequenzenregel korrekt?

$$\frac{\{\varphi \wedge \chi\} \rhd \kappa \quad \{\psi \wedge \chi\} \rhd \kappa}{\{(\varphi \vee \psi) \wedge \chi\} \rhd \kappa}$$

Aufgabe 5 *(5 Punkte)*

Beweise bitte mit Hilfe des Resolutionsverfahrens die nachstehende Folgerungsbehauptung:

$$\{\neg q \leftrightarrow r, \neg r \leftrightarrow \neg p\} \Vdash \neg q \leftrightarrow p$$

Aufgabe 6 *(2 Punkte)*

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = (S, OP, REL)$ mit $S = \{s_1, s_2\}$, $OP = \{g\}$ mit $g : s_1 \to s_2$ und $REL = \{R\}$ mit $R : \langle s_1\, s_2 \rangle$. Weiterhin seien die beiden Variablenmengen $X_{s_1} = \{x, x_1, x_2\}$ und $X_{s_2} = \{y\}$ gegeben und es sei $X = (X_{s_1}, X_{s_2})$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

1. $\exists x.g(x_1) \wedge g(x_2)$ ist eine Formel aus $Form_\Sigma(X)$.
2. $\forall x.\exists y.g(g(g(x))) = y$ ist eine Formel aus $Form_\Sigma(X)$.
3. Es gibt Formeln $\varphi \in Form_\Sigma(X)$, in denen die Variable x frei und gebunden, die Variable x_1 aber nur gebunden vorkommt.
4. Für jede Abbildung $f : \{p, q\} \to Form_\Sigma(X)$ gilt $\neg\neg(f(p) \to f(q)) \vdash_{PHK} (f(p) \to f(q))$.

Aufgabe 7 *(4+4 Punkte)*

Gegeben sei die folgende logische Signatur:

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 = & & \\ sorts: & int, rat & \\ opns: & one: & \to int \\ & add: & int\, int \to int \\ & frac: & int\, int \to rat \\ rels: & Teilbar: & < int\, int > \\ & Isint: & < rat > \end{array}$$

Weiterhin sei die Familie von Variablenmengen $X = (X_{int}, X_{rat})$ mit $X_{int} = \{x, y, z\}$ und $X_{rat} = \{r\}$ gegeben.

(a) Gib eine Struktur A zu Σ_1 an, in der jede der folgenden Formeln gültig ist:

$\varphi_1 = \exists x.\exists y.\, Teilbar(x, y) \wedge \exists x.\exists y.\, \neg Teilbar(x, y)$
$\varphi_2 = \forall x.\, (add(one, x) = x \wedge add(x, one) = x)$
$\varphi_3 = \forall x.\forall y.\, (Teilbar(x, y) \to Isint(frac(y, x))$
$\varphi_4 = \forall r.(\neg Isint(r) \to \exists x.\exists y.\, frac(x, y) = r)$
$\varphi_5 = (\exists y.\forall x.\, Teilbar(x, y)) \to (\forall x.\exists y.\, Teilbar(x, y))$

(b) Beweise, daß die Formel φ_5 allgemeingültig ist.

Aufgabe 8 *(3.5+5 oder 5+3.5 Punkte)*

Gegeben seien eine logische Signatur Σ_2, ein passendes Variablensystem X mit $x \in X$ sowie drei beliebige Formeln $\varphi, \psi, \chi \in Form_{\Sigma_2}(X)$. Von den beiden folgenden Behauptungen ist eine richtig und eine unrichtig. Beweise die richtige Behauptung ohne Verwendung bereits bekannter Äquivalenzen und Folgerungen. Widerlege die unrichtige Behauptung durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels inklusive einer stichhaltigen Begründung.

(a) $(\exists x.\, \varphi) \vee (\neg(\forall x.\, \psi \leftrightarrow \bot)) \equiv (\neg \forall x.\, \neg\varphi) \vee (\exists x.\psi)$

(b) $\exists x.\, ((\varphi \vee \psi) \to \neg\chi) \Vdash (\exists x.\, (\varphi \vee \psi)) \to (\exists x.\, \chi)$

Aufgabe 9 *(3+3+3 Punkte)*

Gegeben sei die Signatur $\Sigma_3 = (S, OP, REL)$ mit $S = \{s\}$, $OP = \{f\}$ mit $f : s \to s$ und $REL = \{P\}$ mit $P : \langle s\, s \rangle$. Weiterhin sei die Variablenmenge $X_s = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ gegeben.

(a) Formuliere eine Formel φ, so daß gilt: $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) = \{A \mid A \text{ ist } \Sigma\text{-Struktur und } |A_s| = 3\}$.

(b) Formuliere eine Formel ψ, so daß gilt:
$\mathrm{Mod}_\Sigma(\psi) = \{A \mid A \text{ ist } \Sigma\text{-Struktur und } P_A = \{(a, f_A(a)) \mid a \in A_s\}\}$.

(c) Gib ohne Beweis eine Struktur $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi \wedge \psi)$ an.