Integralrechnung für GLET

Freitagsrunden Tech Talk

Magdalena Rätz

November 2, 2012

Rechenregeln für Integrale

- konstante Faktoren:
  $$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$
- Summen:
  $$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
- unbestimmte Integrale:
  $$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$
- partielle Integration:
  $$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$
- Substitution und weiteres:
  siehe Ana1 Skript von ISIS

Arbeitsschritte

1. Integrationsobjekt beschreiben
   Grenzen für jede Variable festlegen
2. Differentialle dA bzw. dV auflösen
   $dA = dx \quad dy$
   $dV = dx \quad dy \quad dz$
3. Integral ausrechnen
   - von Innen nach außen Integrale nacheinander lösen
   - auseinanderziehen und Integrale nebeneinander ausrechnen
   $\rightarrow$ die Variablen sind zueinander Konstant

Geometrische Vorstellung: |Volumen| des Körpers über der Fläche mit der jeweiligen z-Komponente z = f(x,y). Physikalisch kann das Flächenintegral aber viele Bedeutungen haben, z.B. eine Flächenladungsdichte.

Beispiel

$$F = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$f(x, y) = 5x$$

$$\iint\limits_F f(x, y)\, dA$$

Lösung

$$\iint\limits_F f(x,y)\;dA = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 5x\;dx\;dy = 2,5$$

Anwendungen für Volumenintegrale sind z.B. die Berechnung von Volumen und die Raumladungsdichte.

Beispiel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$f(x, y, z) = xyz$$

$$\iiint\limits_K f(x, y, z) dV$$

Lösung

$$\iiint_K f(x,y,z)dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyz\ dx\ dy\ dz = \frac{1}{8}$$

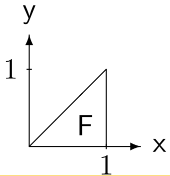
Sind diese Integrale mit a) von Innen nach Außen ausrechnen oder auch mit b) auseinanderziehen lösbar?

$$F = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 16\}$$

$$f(x,y) = \frac{8y^2}{x}; \quad \iint_F f(x,y)\, dA$$

$$K = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{17}{3}, 7 \leq z \leq 8\}$$

$$f(x,y,z) = y\sin^3(x^2) + z; \quad \iiint_Z f(x,y,z)\, dV$$



$$\iint_F \sin(x) + y\, dA$$

Kugel Koordinaten: r, φ, ϑ

r

- gibt den Abstand zum Ursprung an
- $0 \leq r \leq +\infty$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

φ

- gibt den Winkel in der x-y-Ebene an
- $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
- $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$

ϑ

- gibt den Winkel von der z-Achse aus an, nach unten öffnend
- $0 \leq \vartheta \leq \pi$
- $\vartheta = \arctan(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z})$

Beispiel

Wir berechnen das Volumen einer Hohlkugel.

$$K = \{(r, \varphi, \vartheta) \,|\, R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$$

$$f(r, \varphi, \vartheta) = 1$$

$$\iiint\limits_K f((r, \varphi, \vartheta)\ dV$$

Lösung

$$\iiint\limits_K f((r,\varphi,\vartheta))\, dV = \int\limits_{R_1}^{R_2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$$

Zylinder Koordinaten: ρ, φ, z

ρ

- gibt den Radius der Bodenfläche an
- $0 \leq \rho \leq +\infty$
- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

φ

- gibt den Winkel in der x-y-Ebene an
- $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
- $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$

z

- gibt den Abstand zur x-y-Ebene an
- $-\infty \leq z \leq +\infty$
- $z = z$

Beispiel

Wir berechnen die Raumladung in einem halben Zylinder.

$$K = \{(\rho, \varphi, z) \in \mathcal{R}^3 \,|\, 0 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \varphi \leq \pi, -2 \leq z \leq 1\}$$

$$f(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{8} z \cdot e^{\varphi}$$

$$\iiint_K f(\rho, \varphi, z) dV$$

Lösung

$$\iiint\limits_K f(\rho, \varphi, z) dV = \int\limits_0^3 \int\limits_0^\pi \int\limits_{-2}^1 \frac{1}{8} z \cdot e^\varphi \, \rho \, dz \, d\varphi \, d\rho = \frac{27}{32}(e^\pi - 1)$$

Vektorfelder

Vektorfelder ordnen jedem Punkt im Raum einen Vektor zu.

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Integrale über Vektorfelder

Zum Beispiel der Satz von Gauß:

$$Q = \oiint_A \vec{D} d\vec{O}$$

- $\oiint$ ⇒ Integral über eine geschlossene Hüllfläche, d.h. Oberfläche eines Körpers
- $\vec{D}$ ⇒ Vektorfeld (elektrische Flussdichte)
- $d\vec{O}$ ⇒ "Vektorielles Oberflächenelement: mit Hilfe der Tabelle auflösbar
- Nach ausmultiplizieren der Vektoren bleibt bleibt am Ende eine normale Funktion übrig.

Allgemein gilt: Einheitsvektoren sind konstante Faktoren.

Beispiel

Wir integrieren über die Oberfläche einer Kugel, genannt Sphäre S, mit dem Radius 3.

$$\vec{D} = 3\vec{e_r} + 2\vec{e_\varphi} - 4\vec{e_\vartheta}$$

$$Q = \oiint_S \vec{D} d\vec{O}$$

Lösung

$$Q = \oiint_S \vec{D} d\vec{O} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (3\vec{e_r} + 2\vec{e_\varphi} - 4\vec{e_\vartheta})\, r^2\, sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi\, \vec{e_r}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 3r^2\, sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 27 sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi = 108\pi$$

Fragen

???

Danke

für eure Aufmerksamkeit!

Zum Nachlesen

- https://docs.freitagsrunde.org/Veranstaltungen/techtalk/2012/GLET-Integrale-online.pdf
- Ana1 und Ana2 Skripte auf Isis
- http://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung#Mehrdimensionale_Integration