Berlin, 29. Juli 2017

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Klausur Grundlagen der Algorithmik

(Nichterlein/Niedermeier, Sommersemester 2017)

1	/ 10
2	/ 8
3	/ 10
4	/ 12
5	/ 10
Σ	/ 50

Einlesezeit:	15 Minuten
Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktezahl:	50 Punkte

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber in der Farbe schwarz oder blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 1: **Modellieren mit Maximum Flow** (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Problemstellung.

Gegeben ist ein $n \times n$ Schachbrett in dem einige Felder unbenutzbar sind. Die Frage ist nun, ob auf diesem Schachbrett n Spielsteine platziert werden können, sodass gilt:

(a) Jeder Spielstein steht auf einem benutzbaren Feld,

(b) in jeder Spalte des Schachbrettes steht genau ein Spielstein und

(c) in jeder Zeile des Schachbrettes steht genau ein Spielstein?

Modellieren Sie obiges Problem als ein Maximum Flow-Problem, sodass die Anzahl der Knoten und die Anzahl der Kanten im Flussnetzwerk polynomiell in n ist. Geben Sie hierfür die Knoten, Kanten und Kantenkapazitäten Ihres Flussnetzwerks an und begründen Sie, wie die Antwort bestimmt werden kann.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 2: **Lineares Programmieren** (4+4 Punkte)

Geben Sie für die beiden folgenden Probleme eine Formulierung als ganzzahliges lineares Programm (ILP) an (ohne Begründung).

Definieren Sie dazu die verwendeten Variablen, alle Nebenbedingungen sowie die Zielfunktion und geben Sie an, ob diese minimiert oder maximiert wird.

(a) MAXIMUM MATCHING
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Aufgabe: Finde ein größtmögliches $M \subseteq E$, sodass kein Knoten in mehr als einer Kante aus M vorkommt.

(b) CLIQUE
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Aufgabe: Finde ein größtmögliches $S \subseteq V$, sodass alle Knoten in S paarweise benachbart sind.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 3: **Reduktion** (10 Punkte)

Geben Sie für folgendes Problem einen Polynomzeitalgorithmus an.

Zirkulationsproblem

Eingabe: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{N}$ und Knotencharakteristik $d\colon V \to \mathbb{Z}$.

Frage: Gibt es eine Zirkulationsfunktion $f\colon E \to \mathbb{Q}^+$, die folgende Bedingungen erfüllt:

(a) $\forall e \in E\colon 0 \leq f(e) \leq c(e)$ und

(b) $\forall v \in V\colon \sum\limits_{(u,v)\in E} f((u,v)) - \sum\limits_{(v,u)\in E} f((v,u)) = d(v)$?

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass Maximum Flow in Polynomzeit gelöst werden kann.

Maximum Flow

Eingabe: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{N}$ und zwei Knoten $s, t \in V$.

Aufgabe: Berechne einen Fluss $f\colon E \to \mathbb{Q}^+$ welcher $\sum_{(s,u)\in E} f((s,u)) = \operatorname{val}(f)$ maximiert und folgende Bedingungen erfüllt:

(a) $\forall e \in E\colon 0 \leq f(e) \leq c(e)$ und

(b) $\forall v \in V \setminus \{s,t\}\colon \sum\limits_{(u,v)\in E} f((u,v)) = \sum\limits_{(v,u)\in E} f((v,u))$.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 4: **Spezialfälle NP-schwerer Probleme** (4+4+4 Punkte)

Für einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Knotenteilmenge $V' \subseteq V$ gibt $G[V']$ den durch V' induzierten Teilgraph an. Der Graph $G[V']$ beinhaltet alle Knoten V' und die Kanten zwischen diesen Knoten, d. h. formal gilt: $G[V'] = (V', \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in V'\})$.

Der Durchmesser eines Graphen ist die Länge des längsten kürzesten Pfades im Graphen.

Wir betrachten folgendes Problem:

2-Club
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Knotenteilmenge $S \subseteq V$ mit mindestens k Knoten sodass $G[S]$ höchstens Durchmesser zwei hat?

Obwohl 2-Club NP-schwer ist, sind für einige Spezialfälle Polynomzeitalgorithmen bekannt. Zeigen Sie, wie folgende Spezialfälle in Polynomzeit gelöst werden können.

(a) In der Eingabe ist $k = |V| - 2$.

(b) Der Eingabegraph G ist ein Baum.

(c) Der Eingabegraph G hat maximalen Knotengrad 3.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 5: **Approximation** (3+7 Punkte)

Wir betrachten das folgende Problem.

BIN PACKING
Eingabe: Eine Zahl $B \in \mathbb{N}$ und n Objekte mit Gewichten $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{1, 2, \ldots, \lfloor B/2 \rfloor\}$.
Aufgabe: Verteile die Objekte auf möglichst wenige Behälter, sodass in jedem Behälter Objekte mit Gesamtgewicht von höchstens B verstaut sind.

Gegeben ist folgender einfacher Greedy-Algorithmus:

Füge die Objekte in der vorgegebenen Reihenfolge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nacheinander ein, sodass jedes Objekt in den ersten Behälter gegeben wird, in dem noch genug Platz ist. Nur falls in keinem der bereits benutzten Behälter genügend Platz ist, benutze einen neuen, noch leeren Behälter.

(a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus **nicht immer** eine optimale Lösung findet. Geben Sie dazu ein Beispiel mit einer optimalen Lösung und einer vom Algorithmus gefundenen suboptimalen Lösung an.

(b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus eine Faktor-3-Approximation liefert, d. h. er benutzt maximal drei mal so viele Behälter, wie in einer optimalen Lösung gebraucht werden.

Hinweis: Der Algorithmus liefert sogar eine Faktor-2-Approximation.