Berlin, 1. Oktober 2019

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Nachklausur Grundlagen der Algorithmik

(Niedermeier/Bentert, Sommersemester 2019)

Aufgabe Nr.:	1	2	3	4	**Summe**
Punktzahl:	10	15	13	12	50
Davon erreicht:					

Einlesezeit:	15 Minuten
Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktezahl:	50 Punkte

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber in der Farbe Schwarz oder Blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**
- Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: **Modellieren mit Maximum Flow** (10 Punkte)

In einem Radverleih gibt es n Fahrräder und eine Gruppe von n Studentinnen möchte jeweils eines dieser Fahrräder ausleihen. Dazu gibt jede Studentin an, welche Fahrräder ihr gefallen. Außerdem müssen an die Fahrräder noch Klingeln angebracht werden. Es gibt $m \geq n$ Klingeln, wobei nicht jede Klingel an jedes Fahrrad angebracht werden kann. Ihnen sei bekannt, welche Klingeln an welche Fahrräder angebracht werden können. Ihre Aufgabe besteht nun darin, jedem Fahrrad eine Klingel und jeder Studentin ein Fahrrad zuzuweisen, sodass alle Wünsche und Anforderungen erfüllt werden (oder zu zeigen, dass eine solche Zuordnung nicht existiert).

Modellieren Sie dieses Problem als ein MAXIMUM FLOW-Problem, sodass die Anzahl der Knoten und die Anzahl der Kanten im Flussnetzwerk polynomiell in $n + m$ sind. Geben Sie hierfür die Knoten, Kanten und Kantenkapazitäten Ihres Flussnetzwerks an und beschreiben Sie, wie die Antwort bestimmt werden kann.

Aufgabe 2: **Eigenschaften von (I)LP** (15 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um (I)LP-Formulierungen für INTERVAL PARTITION.

Interval Partition

Eingabe: Eine Menge $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ von Intervallen (Jobs) mit Startzeiten s_i und Endzeiten t_i ($1 \leq i \leq n$).

Aufgabe: Finde eine kleinstmögliche Menge von „Zeitstrahlen", sodass alle Jobs auf diese verteilt werden können, ohne dass sich zwei Intervalle auf einem Zeitstrahl überlappen.

(a) Erklären Sie, warum folgende ILP-Formulierung korrekt ist. Geben Sie dazu an, wofür die Variablen und die Zielfunktion stehen und was die einzelnen Nebenbedingungen aussagen. (10 P)

$$
\begin{aligned}
\text{Variablen: } & x_i && \forall\, 1 \leq i \leq n \\
& x_i^j && \forall\, 1 \leq i \leq n, \forall j \in J \\
\text{Zielfunktion: Minimiere } & \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\text{Nebenbedingungen: } & x_i \in \{0,1\} && \forall\, 1 \leq i \leq n && (1) \\
& x_i^j \in \{0,1\} && \forall\, 1 \leq i \leq n, \forall j \in J && (2) \\
& x_i \geq x_i^j && \forall\, 1 \leq i \leq n, \forall j \in J && (3) \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i^j = 1 && \forall j \in J && (4) \\
& x_i^j + x_i^k \leq 1 && \forall\, 1 \leq i \leq n, \forall j,k \in J \text{ mit } s_j \leq s_k \leq t_j && (5)
\end{aligned}
$$

(b) Widerlegen Sie folgende Aussage: (5 P)

„Da INTERVAL PARTITION in Polynomzeit lösbar und die gegebene ILP-Formulierung korrekt ist, können Nebenbedingungen (1) und (2) durch $0 \leq x_i \leq 1$ und $0 \leq x_i^j \leq 1$ ersetzt werden, um eine korrekte LP-Formulierung für INTERVAL PARTITION zu erhalten."

Zeigen Sie dazu, dass der minimale Wert der Zielfunktion der beschriebenen LP-Formulierung für INTERVAL PARTITION kleiner sein kann als die minimale Anzahl an benötigten Zeitstrahlen.

Aufgabe 3: **Datenreduktion** (13 Punkte)

Das NP-vollständige 4-Coloring-Problem ist wie folgt definiert:

4-Coloring
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G.
Frage: Können alle Knoten in G so mit vier Farben gefärbt werden, dass keine zwei Knoten mit der gleichen Farbe durch eine Kante verbunden sind?

Nachfolgend sind vier Datenreduktionsregeln für 4-Coloring gegeben. Welche der vorgeschlagenen Regeln sind korrekt? Eine Datenreduktionsregel für 4-Coloring heißt *korrekt*, wenn der Eingabegraph G genau dann vierfärbbar ist, wenn der Graph G', der aus der Anwendung der Datenreduktionsregel auf G resultiert, vierfärbbar ist.

Geben Sie zu jeder Regel an, ob diese korrekt ist oder nicht und erklären Sie warum die Regel korrekt ist, bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an, das heißt, einen Graph auf dem die Datenreduktionsregel nicht korrekt ist.

(a) Wenn der Graph eine Clique der Größe 5 enthält, dann gib eine triviale NEIN-Instanz (z.B. eine Clique der Größe 5) aus. (Eine Clique der Größe 5 besteht aus fünf Knoten, die alle paarweise durch eine Kante verbunden sind.) (3 P)

(b) Wenn der Graph einen Knoten v mit maximal drei Nachbarn enthält, dann lösche v und alle an v anliegenden Kanten aus dem Graph. (3 P)

(c) Wenn der Graph einen Knoten w mit maximal vier Nachbarn enthält, dann lösche w und alle an w anliegenden Kanten aus dem Graph. (3 P)

(d) Wenn jeder Knoten im Graph mindestens vier Nachbarn hat, dann gib eine Clique der Größe 5 aus. (4 P)

Hinweis: Genau zwei der vier vorgeschlagenen Datenreduktionsregeln sind korrekt. Diese Information darf aber nicht als Begründung für oder gegen die Korrektheit einer Datenreduktionsregel verwendet werden.

Aufgabe 4: **Spezialfälle coNP-schwerer Probleme** (12 Punkte)

Betrachten Sie das aus der Vorlesung bekannte Problem TAUTOLOGIE:

Tautologie
Eingabe: Eine aussagenlogische Formel F.
Frage: Ist F unter *allen* Belegungen wahr?

(a) Zeigen Sie, dass TAUTOLOGIE in polynomieller Zeit (in der Größe von F) gelöst werden kann, wenn F in konjunktiver Normalform (KNF) ist. (6 P)

(b) Zeigen Sie, dass TAUTOLOGIE in polynomieller Zeit (in der Größe von F) gelöst werden kann, wenn $F = F_1 \vee F_2$, wobei F_1 und F_2 in KNF sind. (6 P)

Erinnerung: Eine Formel ist in KNF, wenn sie nur aus Klauseln besteht, in denen Variablen und negierte Variablen durch logisches ODER verknüpft werden, und die Klauseln durch logisches UND verknüpft werden.