Berlin, 14. April 2016

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Nachklausur Grundlagen der Algorithmik

(Niedermeier/Froese/Chen/Fluschnik, Wintersemester 2015/16)

1	/ 10
2	/ 10
3	/ 11
4	/ 9
5	/ 10
Σ	/ 50

Einlesezeit:	15 Minuten
Bearbeitungszeit:	60 Minuten

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber oder Füller in der Farbe schwarz oder blau.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Maximum Flow** (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Problemstellung.

An einem Mitfahrservice nehmen n Passagiere und m Fahrer teil. Jeder Passagier p_i hat ein bestimmes Ziel, das er erreichen möchte. Daher kann er nur bei einem Fahrer mitfahren, der dieses Ziel unterwegs auf seiner Fahrt ansteuert. Dabei hat jeder Fahrer f_j in seinem Auto nur begrenzt Platz für maximal c_j andere Personen. Die Frage ist nun, ob sich alle Passagiere so auf die Fahrer verteilen lassen, dass jeder Passagier sein Ziel erreicht und keiner der Fahrer zu viele Personen befördert.

Modellieren Sie obiges Problem als ein Maximum Flow-Problem, sodass die Anzahl der Knoten und die Anzahl der Kanten im Flussnetzwerk polynomiell in n und m ist. Geben Sie hierfür die Knoten, Kanten und Kantenkapazitäten Ihres Flussnetzwerks an und begründen Sie, wie die Antwort bestimmt werden kann.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 2: **Netzwerkflüsse und Lineares Programmieren** (4+6 Punkte)

(a) Vervollständigen Sie die nachfolgende Flussdefinition, indem Sie die beiden fehlenden Bedingungen formal ergänzen.

Ein s-t-Fluss in einem gerichteten Flussnetzwerk $G = (V, E)$ mit Kapazitätsfunktion $c\colon E \to \mathbb{Q}^+$ ist eine Funktion $f\colon E \to \mathbb{Q}_0^+$, die folgende zwei Bedingungen erfüllt:

1. (Kapazitätsbedingung)

2. (Flusserhaltung)

(b) Formulieren Sie Maximum Flow als lineares Programm. Definieren Sie dazu die verwendete Variablenmenge, alle Nebenbedingungen, sowie die Zielfunktion und geben Sie an, ob diese maximiert oder minimiert wird. Dabei soll die Anzahl der Variablen linear in $|V| + |E|$ sein.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 3: **3-Hitting-Set** (4+3+4 Punkte)

Das Problem 3-Hitting-Set ist wie folgt definiert.

3-Hitting-Set
Eingabe: Eine Menge $\mathcal{C}$ von Teilmengen einer Grundmenge U, die jeweils höchstens 3 Elemente enthalten, und eine natürliche Zahl $k > 0$.
Frage: Ist es möglich, höchstens k Elemente aus U so auszuwählen, dass jede Teilmenge $C \in \mathcal{C}$ mindestens eines dieser Elemente enthält?

(a) Geben Sie eine Lösung für die folgende Instanz an.

$$\begin{aligned} U &= \{a, b, c, d, e\}, \\ \mathcal{C} &= \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}\}, \\ k &= 2. \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, wie eine Faktor-3-Approximation für die Minimierungsvariante von 3-Hitting-Set in polynomieller Zeit berechnet werden kann.

(c) Zeigen Sie, wie 3-Hitting-Set mit einem Suchbaumalgorithmus in $3^k \cdot (|\mathcal{C}| + |U|)^{O(1)}$ Zeit gelöst werden kann.

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 4: **Probleme auf bipartiten Graphen** (3+3+3 Punkte)

Von den folgenden im allgemeinen NP-vollständigen Graphproblemen sind mindestens drei in Polynomzeit lösbar, wenn der Eingabegraph bipartit ist. Wählen Sie drei Probleme aus und begründen Sie, wie diese in Polynomzeit gelöst werden können.

(a) **3-Coloring**
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G.
Frage: Ist es möglich, die Knoten in G mit maximal 3 Farben so zu färben, dass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben?

(b) **Vertex Cover**
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G und eine natürliche Zahl $k > 0$.
Frage: Gibt es k Knoten in G, sodass jede Kante in G mindestens einen dieser Knoten als Endpunkt hat?

(c) **Dominating Set**
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G und eine natürliche Zahl $k > 0$.
Frage: Gibt es k Knoten in G, sodass jeder andere Knoten mindestens einen dieser k Knoten als Nachbarn hat?

(d) **Independent Set**
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G und eine natürliche Zahl $k > 0$.
Frage: Gibt es k Knoten in G, die paarweise nicht über eine Kante verbunden sind?

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 5: **Vertex Cover und Set Cover** (10 Punkte)

Wir betrachten die beiden folgenden Probleme.

Vertex Cover
Eingabe: Ein ungerichteter Graph G und eine natürliche Zahl $k > 0$.
Frage: Gibt es k Knoten in G, sodass jede Kante in G mindestens einen dieser Knoten als Endpunkt hat?

Set Cover
Eingabe: Eine Menge $\mathcal{C}$ von Teilmengen einer Grundmenge U und eine natürliche Zahl $k > 0$.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ mit $|\mathcal{C}'| \leq k$, sodass $\bigcup_{C \in \mathcal{C}'} C = U$ gilt?

Im Folgenden nehmen wir an, dass wir einen Algorithmus A kennen, der Set Cover in Polynomzeit löst.

Zeigen Sie, wie Algorithmus A eingesetzt werden kann, um Vertex Cover in Polynomzeit zu lösen. Begründen Sie die Korrektheit.