**Technische Universität Berlin** **2018 WiSe**
**Fakultät II – Institut für Mathematik** 11. Februar 2018
Dozenten: K. Fackeldey, C. Mehl, G. Penn-Karras

# Probeklausur
# „Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: ....................................... Vorname: .......................................

Matr.–Nr.: .................................. Studiengang: ..................................

---

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

**Hinweise:**

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf DIN A4-Blättern ab.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren werden nicht gewertet.
- **In den Aufgaben 1–3 ist nur das Ergebnis gefragt und auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Geben Sie keine Rechnungen an.**
- **In den Aufgaben 4–9 ist immer ein vollständiger Lösungsweg anzugeben (Rechnung und/oder Begründung).**

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

---

Bei der Klausur sind 80 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 40 Punkten bestanden.

---

**Korrektur**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

**1. Aufgabe** (8 Punkte)

**In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.**

a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$.

normierte Zeilenstufenform: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des reellen linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 13 - 2x_4 \\ x_2 \\ 5 - 2x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \middle| \, x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Die normierte Zeilenstufenform von $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ist $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis von Kern$(A)$, eine Basis von Bild$(A)$ und dim(Bild$(A)$):

Basis von Kern$(A)$: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Basis von Bild$(A)$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Dimension von Bild$(A)$: 2

*Lösung.* a) [3 Punkte] Mit dem Gauß-Algorithmus ist $[A, \vec{b}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \overset{\substack{II-2I \\ \frac{1}{2}III}}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{II\leftrightarrow III}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{I-II}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

die normierte Zeilenstufenform (NZSF) von $[A, \vec{b}]$.

b) [2 Punkte] Die Lösungsmenge ist gegeben durch $\mathbb{L}(A, b) = \vec{x}_P + \mathbb{L}(A, \vec{0})$, wo $\vec{x}_P$ eine spezielles Lösung ist und $\mathbb{L}(A, \vec{0})$ der $\text{Kern}(A)$ ist. An der NZSF von $A$ sehen wir: $x_1$ und $x_3$ sind Pivotvariablen und können somit eindeutig bestimmt werden. Hingegen sind $x_2$, $x_4$, und $x_5$ frei wählbar. Aus der NZSF lesen wir ab:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 = -2x_4, \\ x_3 + 2x_4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_3 = -2x_4. \end{aligned}$$

Setzen wir noch $x_2 = s \in \mathbb{C}$, $x_4 = t \in \mathbb{C}$, und $x_5 = u \in \mathbb{C}$ so ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}(A, 0) = \left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t, u \in \mathbb{C} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ausserdem, $\vec{x}_P = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ eine spezielle Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist. Hieraus folgt

$$\mathbb{L}(A, b) = \vec{x}_P + \mathbb{L}(A, \vec{0}) = \left\{ \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t, u \in \mathbb{C} \right\}.$$

c) [3 Punkte] Eine Basis von $\text{Kern}(A)$ haben wir bereits in b) berechnet:

$$\mathcal{B}_{\text{Kern}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Basis von $\text{Bild}(A)$: Die NZSF hat Pivotelemente in den Spalten 1 und 3, daher bilden die 1. und 3. Spalte von $A$ eine Basis von $\text{Bild}(A)$:

$$\mathcal{B}_{\text{Bild}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Daher ist $\dim(\text{Bild}(A)) = 2$.

Alternativ ist

$$\dim(\text{Bild}(A)) = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(C) = 2.$$

$\square$

**2. Aufgabe** (9 Punkte)

**In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.**

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & i & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$ in Linearfaktorzerlegung.

Charakteristisches Polynom in Linearfaktorzerlegung:

$$p_A(z) = -(z-1)(z-5)(z-7)$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{5,5}$ mit charakteristischem Polynom $p_A(z) = -(z-1)^4(z+3)$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$ und ihre algebraischen Vielfachheiten.

Eigenwerte und algebraische Vielfachheiten:

$z_1 = 1$, mit Vfh.: 4 $\quad z_2 = -3$, mit Vfh.:1

c) Sei $A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\pi$.

Geometrische Vielfachheit: 1

d) Sei $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ mit

$$\operatorname{Kern}(A-2I) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \operatorname{Kern}(A-3I) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D$ und eine invertierbare Matrix $S$, so dass gilt $A = SDS^{-1}$.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

*Lösung.* a) [3 Punkte] Das charakteristische Polynom von $A$ ist

$$p_A(z) = \det(A - zI) = \det\left(\begin{bmatrix} 4-z & 0 & 3 \\ 0 & 5-z & 0 \\ 3 & i & 4-z \end{bmatrix}\right).$$

Eine Laplace-Entwicklung nach der zweiten Zeile liefert

$$\begin{aligned} p_A(z) &= -0\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ i & 4-z \end{bmatrix}\right) + (5-z)\det\left(\begin{bmatrix} 4-z & 3 \\ 3 & 4-z \end{bmatrix}\right) - 0\det\left(\begin{bmatrix} 4-z & 0 \\ 3 & i \end{bmatrix}\right) \\ &= (5-z)((4-z)^2 - 9) = (5-z)(z^2 - 8z + 7) = (5-z)(z-7)(z-1) \\ &= -(z-1)(z-5)(z-7). \end{aligned}$$

b) [2 Punkte] Wir setzen das Polynom auf Null $p_A(z) = -(z-1)^4(z+3) = 0$ dass

$$(z-1)^4 = 0 \Rightarrow z = 1 \quad \text{mit algebraischer Vielfachheit } 4,$$

oder

$$(z+3) = 0 \Rightarrow z = -3 \quad \text{mit algebraischer Vielfachheit } 1.$$

c) [2 Punkte] Es ist

$$\operatorname{Kern}(A - \pi I) = \operatorname{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\},$$

also ist die geometrische Vielfachheit $g(\pi, A) = \dim(\operatorname{Kern}(A - \pi I)) = 1$.

d) [2 Punkte] Da die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ im Kern der Matrix $A - 2I$ liegen und ungleich Null sind, sind es Eigenvektoren von $A$ zum Eigenwert 2. Genauso ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3. Nehmen wir die Eigenvektoren als Spalten der Matrix $S$ und setzen die Eigenwerte auf der Diagonalen der Matrix $D$, erhält man das gewünschte Ergebnis.

□

**3. Aufgabe** (10 Punkte)

**In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.**

a) Bestimmen Sie die kartesische Darstellung von $z = \frac{1}{1-i}$.

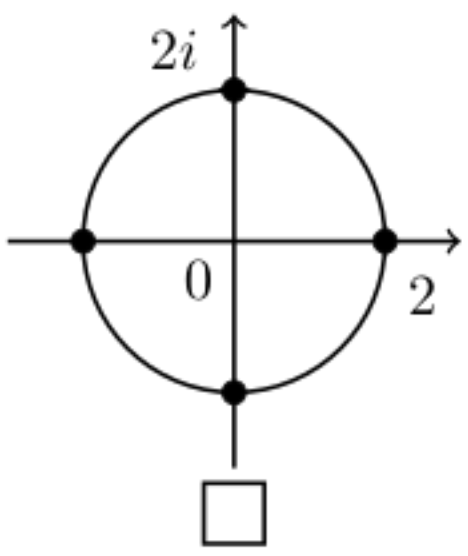
kartesische Darstellung: $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

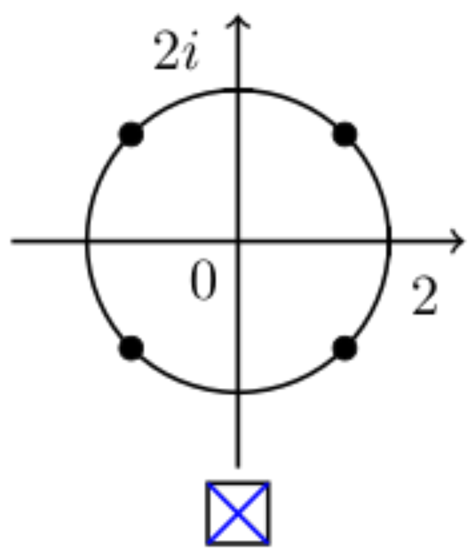
b) Geben Sie die Eulerdarstellung von $z = 1 - i$ und von $z^5$ an.

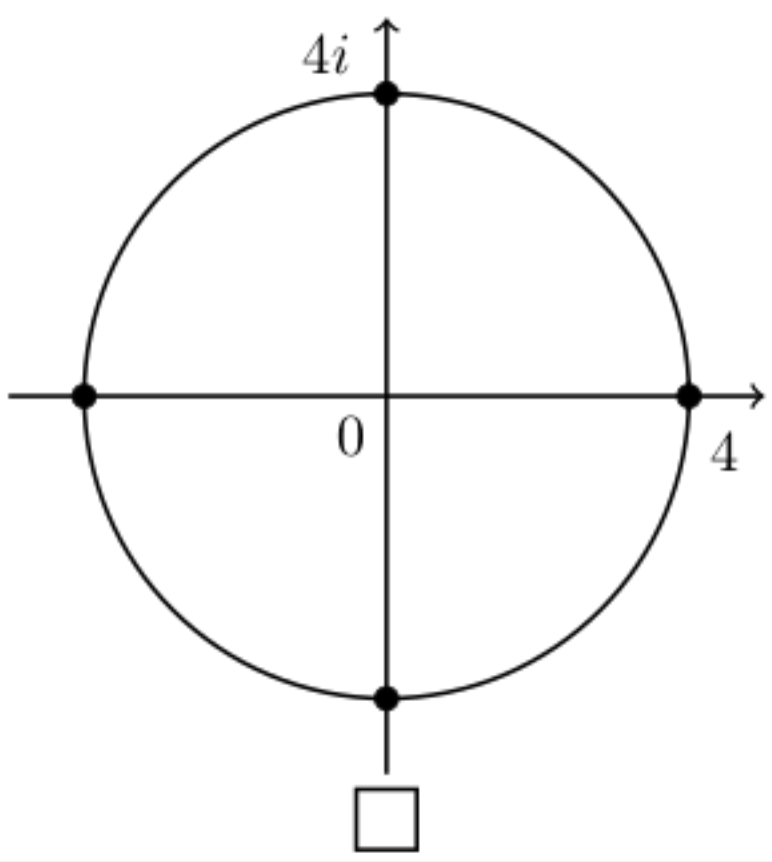
Eulerdarstellung von $z$: $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

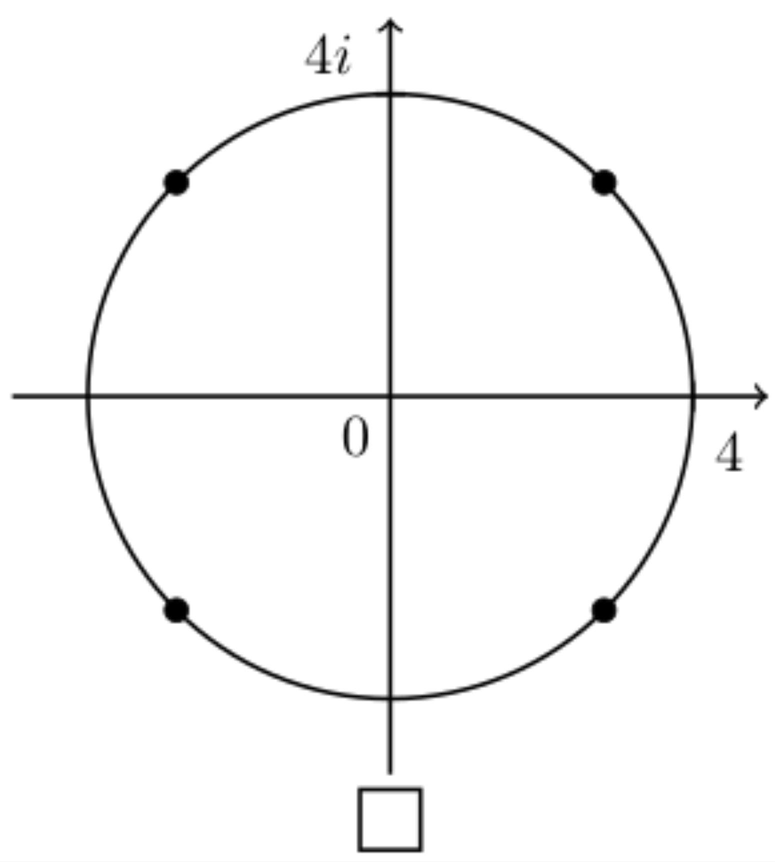
Eulerdarstellung von $z^5$: $z^5 = \sqrt{2}^5 e^{-i\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}}$

c) Welche der folgenden Skizzen enthält alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 16e^{i\pi}$? Kreuzen Sie die richtige Skizze an.



d) Geben Sie ein Polynom $p$ in Linearfaktorzerlegung an, dass folgende Eigenschaften besitzt:

- $p$ hat Grad 4
- $p$ hat reelle Koeffizienten
- $p$ hat die Nullstellen $1+i$ und $1$
- $p$ hat eine doppelte Nullstelle.

$p(x) =$ $(x-1)^2 \cdot (x-(1+i)) \cdot (x-(1-i))$

*Lösung.* a) [2 Punkte] $z = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{1+i}{1-i^2} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

b) [4 Punkte] $z = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{1}{4}\pi}$ und $z^5 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{1}{4}\pi})^5 = \sqrt{2}^5 e^{-i\frac{5}{4}\pi}$

c) [2 Punkte] Es gilt $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}(+k\frac{\pi}{2})}$ ist eine Lösung (für alle $k \in \mathbb{Z}$). Somit ist die rechte obere Skizze korrekt.

d) [2 Punkte]

$$p(x) = (x-1)^2(x-(1+i))(x-(1-i))$$

□

**4. Aufgabe** (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von $p_1(x) = x^2 - x + 1$, $p_2(x) = x - 1$ und $p_3(x) = x^2$ bzgl. der Basis $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$ des $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

b) Ist $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$?

*Lösung.* a) [3 Punkte] Es sind

$$p_1(x) = 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot x + 1 \cdot 1, \qquad \text{also } K_{\mathcal{B}}(p_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$p_2(x) = 0 \cdot x^2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1, \qquad \text{also } K_{\mathcal{B}}(p_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$p_3(x) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1, \qquad \text{also } K_{\mathcal{B}}(p_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) [1 Punkt] Wegen $x^2 + x + 1 = x^2 - (x - 1)$ ist $p_1$ eine Linearkombination von $p_2$ und $p_3$, also sind die Polynome $p_1, p_2, p_3$ linear abhängig und bilden keine Basis.

**Alternativ:** Die Koordinatenvektoren sind linear abhängig, denn

$$\operatorname{Rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 < 3,$$

und dann sind auch $p_1, p_2, p_3$ linear abhängig.

□

**5. Aufgabe** (7 Punkte)

Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

*Lösung.* Es bezeichne $b_i$ die $i$-te Spalte von $A$. Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren auf $b_1, b_2, b_3$ an:

$$\begin{aligned}
&\|b_1\|_2 = \sqrt{2}, \\
&\quad u_1 = \frac{1}{\|b_1\|_2} b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
&\quad \hat{u}_2 = b_2 - \underbrace{\langle b_2, u_1 \rangle}_{=\sqrt{2}} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
&\|\hat{u}_2\|_2 = 1, \\
&\quad u_2 = \frac{1}{\|\hat{u}_2\|_2} \hat{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad \hat{u}_3 = b_3 - \underbrace{\langle b_3, u_1 \rangle}_{=4\sqrt{2}} u_1 - \underbrace{\langle b_3, u_2 \rangle}_{=0} u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} - 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
&\|\hat{u}_3\|_2 = \sqrt{2}, \\
&\quad u_3 = \frac{1}{\|\hat{u}_3\|_2} \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$Q = [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und die obere Dreiecksmatrix $R$ erhält man durch $R = Q^T A$, deshalb

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

oder direkt aus dem Gram-Schmidt-Verfahren:

$$R = \begin{bmatrix} \|b_1\|_2 & \langle b_2, u_1 \rangle & \langle b_3, u_1 \rangle \\ 0 & \|\hat{u}_2\|_2 & \langle b_3, u_2 \rangle \\ 0 & 0 & \|\hat{u}_3\|_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$\square$

**6. Aufgabe** (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{84n^2+2n}{2n^2+5}$.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x}$.

c) Es sei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \le \pi, \\ e^\pi + a\sin(x) & \text{für } x > \pi. \end{cases}$$

Untersuchen Sie mit dem Differentialquotienten, für welches $a\in\mathbb{R}$ die Funktion $f$ in $x=\pi$ differenzierbar ist.

*Lösung.* a) [2 Punkte] Kürzen von $n^2$ und Anwenden der Grenzwertsätze (GWS) ergibt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{84n^2+2n}{2n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{84+\frac{2}{n}}{2+\frac{5}{n^2}} \overset{\text{GWS}}{=} \frac{84}{2} = 42.$$

b) [4 Punkte] Wegen $x\to 0$ und $\ln(\cos(x))\to\ln(1)=0$ ist die Regel von l'Hospital anwendbar :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x} &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x))}{1} \\ &= -\frac{\sin(0)}{\cos(0)} = -\frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

c) [4 Punkte] Damit $f$ in $x=\pi$ differenzierbar ist, muss $\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$ existieren. Wir untersuchen den links- und rechtsseitigen Grenzwert.

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x\nearrow\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\nearrow\pi}\frac{e^x-e^\pi}{x-\pi} = (e^x)'|_{x=\pi} = e^\pi.$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} &= \lim_{x\searrow\pi}\frac{e^\pi + a\sin(x) - e^\pi}{x-\pi} = a\lim_{x\searrow\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi} \\ &= a\lim_{x\searrow\pi}\frac{\sin(x)-\sin(\pi)}{x-\pi} = a\cos(\pi) = -a.\end{aligned}$$

(Alternativ kann der letzte Grenzwert auch mit der Regel von l'Hospital berechnet werden.)

Der Grenzwert $\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$ existiert, wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert gleich sind, also wenn $a=-e^\pi$ ist. Also ist $f$ nur für $a=-e^\pi$ differenzierbar.

$\square$

**7. Aufgabe** (13 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^3}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{2x-2}{(x+1)(x-3)}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$.

*Lösung.* a) [4 Punkte] Substituiere $t = 1+\sin(x)$, dann ist $dt = \cos(x)\,dx$ und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^3}\,dx = \int_{t=1}^{t=2} \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2}t^{-2}\Big|_1^2$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{3}{8}.$$

**Alternative:** Substituiere $t = \sin(x)$.

**Alternative 2:** Eine Stammfunktion von $\frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^3}$ ist $-\frac{1}{2}(1+\sin(x))^{-2}$, so dass man nun direkt integrieren kann.

b) [4 Punkte] Wir berechnen zuerst eine PBZ des Integranden:

$$\frac{2x-2}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}.$$

Mit der Zuhaltemethode sind $A = \frac{2x-2}{x-3}\big|_{x=-1} = \frac{-4}{-4} = 1$ und $B = \frac{2x-2}{x+1}\big|_{x=3} = \frac{4}{4} = 1$.

Dann ist

$$\int \frac{2x-2}{(x+1)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3}\right)dx = \ln|x+1| + \ln|x-3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

c) [5 Punkte] Es ist

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x}\,dx$$

Partielle Integration: $u(x) = x$, $v'(x) = e^{-x}$, also $u'(x) = 1$ und $v(x) = -e^{-x}$:

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-xe^{-x}\big|_0^b - \int_0^b 1(-e^{-x})\,dx\right)$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(-be^{-b} + (-e^{-x})|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-be^{-b} - e^{-b} + 1\right)$$
$$= 1.$$

□

**8. Aufgabe** (14 Punkte)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von $f$.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \geq 1$ ist

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-1)! x^{-n}.$$

c) Bestimmen Sie das $n$-te Taylorpolynom von $f$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

d) Sei $R_n$ das Restglied zum $n$-ten Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
Zeigen Sie: Für $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ gilt $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$.

e) Konvergiert die Taylorreihe von $f$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ in jedem $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ gegen $f(x)$?

*Lösung.* a) [1 Punkt] Der Logarithmus ist nur für positive reelle Zahlen definiert, also muss $\frac{1}{x} > 0$, also $x > 0$ gelten. Also ist $D = ]0, \infty[$.

b) [5 Punkte]

IA Für $n = 1$: Es ist $f(x) = \ln(x^{-1}) = -\ln(x)$, also $f'(x) = -\frac{1}{x}$, und $(-1)^1(1-1)!x^{-1} = -x^{-1} = f'(x)$. Also stimmt die Behauptung für $n = 1$.

IV Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

IS Für $n+1$: Es ist

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \overset{\text{IV}}{=} \frac{d}{dx}(-1)^n(n-1)!x^{-n} \\ &= (-1)^n(n-1)!(-n)x^{-n-1} = (-1)^{n+1} n! x^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

c) [2 Punkte] Das $n$-te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ ist

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k.$$

Einsetzen von $f(1) = \ln(1) = 0$ und $f^{(k)}(1) = (-1)^k(k-1)!$ aus b) ergibt

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}(x-1)^k.$$

d) [4 Punkte] Das Restglied ist (in Lagrange-Form)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\xi^{-(n+1)}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1},$$

wobei $\xi$ zwischen $x_0 = 1$ und $x$ liegt.

Abschätzung: Für $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ gilt $|x - 1| \leq \frac{1}{2}$. Da $\xi$ zwischen $x_0 = 1$ und $x$ liegt, ist insbesondere $|\xi| \geq \frac{1}{2}$, also $\frac{1}{|\xi|} \leq 2$ und daher $\frac{|x-1|}{|\xi|} \leq 1$. Daher ist

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

e) [2 Punkte] Für jedes $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ gilt $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, also konvergiert die Taylorreihe von $f$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ gegen $f(x)$.

□

**9. Aufgabe** (5 Punkte)

Berechnen Sie die reelle Fourierreihe der 2-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < 1, \\ 0 & \text{für } 1 \le t < 2. \end{cases}$$

*Lösung.* Es ist $T = 2$, also $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.
Berechnung der Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(0\omega t)\,dt = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 \underbrace{f(t)}_{=1}\,dt + \int_1^2 \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt = 1.$$

Für $k \ge 1$ gilt ähnlich:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \int_0^1 \underbrace{f(t)}_{=1}\cos(k\pi t)\,dt + \int_1^2 \underbrace{f(t)}_{=0}\cos(k\pi t)\,dt \\ &= \int_0^1 \cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{k\omega}\sin(k\pi t)|_0^1 = \frac{1}{k\pi}(\sin(k\pi) - \sin(0)) = 0. \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \int_0^1 \underbrace{f(t)}_{=1}\sin(k\pi t)\,dt + \int_1^2 \underbrace{f(t)}_{=0}\sin(k\pi t)\,dt \\ &= \int_0^1 \sin(k\pi t)\,dt = \frac{1}{k\pi}(-\cos(k\pi t))|_0^1 = \frac{1}{k\pi}(-\cos(k\pi) + 1) = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}. \end{aligned}$$

Fourierreihe von $f$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\sin(k\pi t).$$

□