Technische Universität Berlin **2018 WiSe**
Fakultät II – Institut für Mathematik 11. Februar 2018
Dozenten: K. Fackeldey, C. Mehl, G. Penn-Karras

Probeklausur
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf DIN A4-Blättern ab.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren werden nicht gewertet.
- **In den Aufgaben 1–3 ist nur das Ergebnis gefragt und auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Geben Sie keine Rechnungen an.**
- **In den Aufgaben 4–9 ist immer ein vollständiger Lösungsweg anzugeben (Rechnung und/oder Begründung).**

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Bei der Klausur sind 80 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 40 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

1. Aufgabe (8 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$.

normierte Zeilenstufenform: $\left[\begin{array}{ccc|c} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{array}\right]$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des reellen linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{L} =$

c) Die normierte Zeilenstufenform von $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ist $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis von Kern(A), eine Basis von Bild(A) und dim(Bild(A)):

Basis von Kern(A):

Basis von Bild(A):

Dimension von Bild(A):

2. Aufgabe (9 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & i & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$ in Linearfaktorzerlegung.

Charakteristisches Polynom in Linearfaktorzerlegung:

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{5,5}$ mit charakteristischem Polynom $p_A(z) = -(z-1)^4(z+3)$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und ihre algebraischen Vielfachheiten.

Eigenwerte und algebraische Vielfachheiten:

c) Sei $A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts π.

Geometrische Vielfachheit:

d) Sei $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ mit

$$\operatorname{Kern}(A - 2I) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \operatorname{Kern}(A - 3I) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S, so dass gilt $A = SDS^{-1}$.

$D =$ $S =$

3. Aufgabe (10 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) Bestimmen Sie die kartesische Darstellung von $z = \frac{1}{1-i}$.

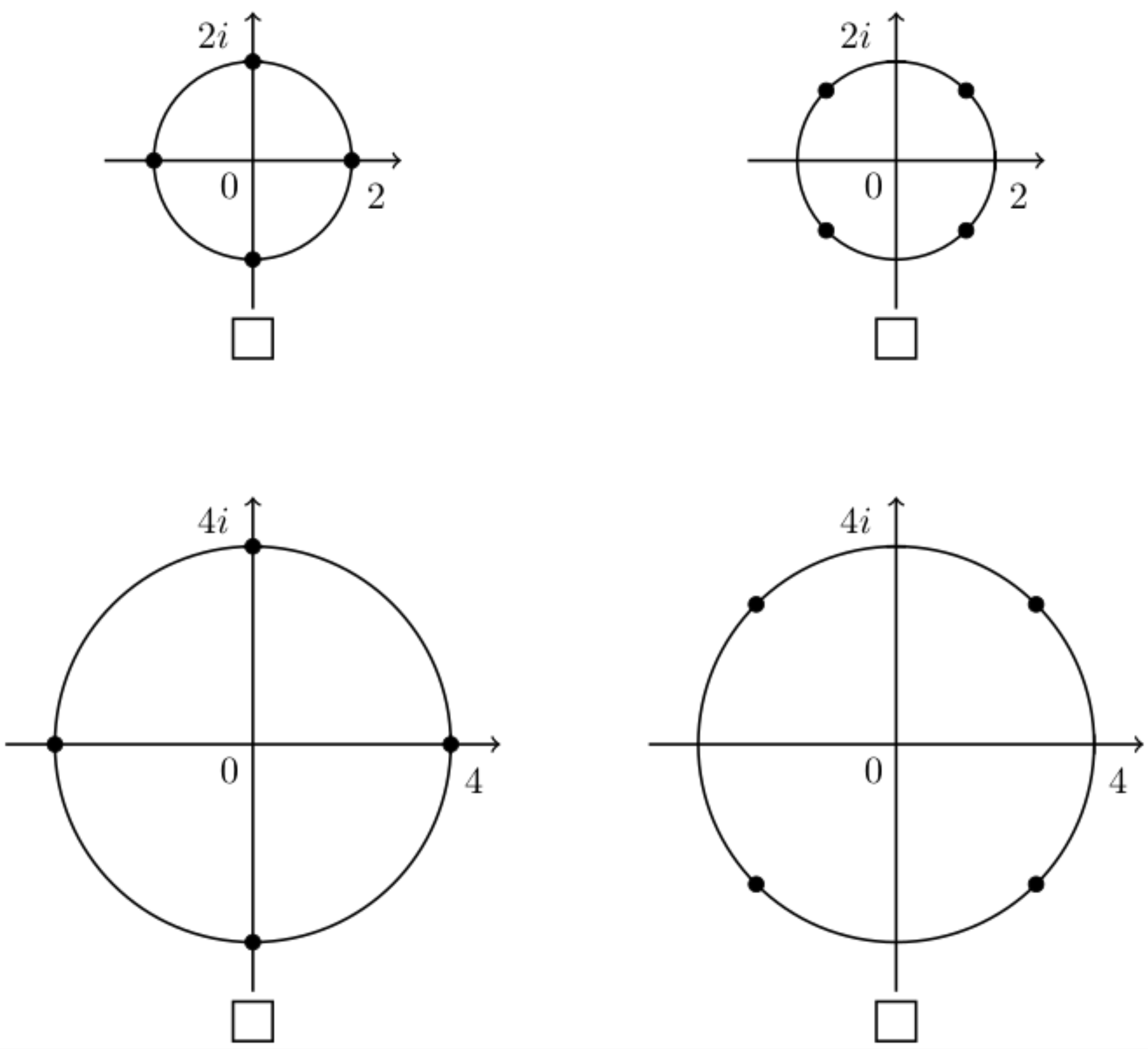
kartesische Darstellung:

b) Geben Sie die Eulerdarstellung von $z = 1 - i$ und von z^5 an.

Eulerdarstellung von z:

Eulerdarstellung von z^5:

c) Welche der folgenden Skizzen enthält alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 16e^{i\pi}$? Kreuzen Sie die richtige Skizze an.



d) Geben Sie ein Polynom p in Linearfaktorzerlegung an, dass folgende Eigenschaften besitzt:

- p hat Grad 4
- p hat reelle Koeffizienten
- p hat die Nullstellen $1+i$ und 1
- p hat eine doppelte Nullstelle.

$p(x) =$

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von $p_1(x) = x^2 - x + 1$, $p_2(x) = x - 1$ und $p_3(x) = x^2$ bzgl. der Basis $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$ des $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

b) Ist $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$?

5. Aufgabe (7 Punkte)

Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

6. Aufgabe (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{84n^2 + 2n}{2n^2 + 5}$.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x}$.

c) Es sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \leq \pi, \\ e^\pi + a\sin(x) & \text{für } x > \pi. \end{cases}$$

Untersuchen Sie mit dem Differentialquotienten, für welches $a \in \mathbb{R}$ die Funktion f in $x = \pi$ differenzierbar ist.

7. Aufgabe (13 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^3}\, dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{2x-2}{(x+1)(x-3)}\, dx$,

c) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x}\, dx$.

8. Aufgabe (14 Punkte)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \geq 1$ ist

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-1)! x^{-n}.$$

c) Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

d) Sei R_n das Restglied zum n-ten Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Zeigen Sie: Für $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ gilt $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$.

e) Konvergiert die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ in jedem $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ gegen $f(x)$?

9. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie die reelle Fourierreihe der 2-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{für } 1 \leq t < 2. \end{cases}$$

Gesamtpunktzahl: 80 Punkte