Klausur

Analysis 1 und lineare Algebra

Wintersemester 22/23

Frage 1

Richtig

Erreichte Punkte 4,00 von 4,00

Frage markieren

Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, über die folgendes bekannt ist:

- $\mathrm{Im}(z_1) = 4$
- $\mathrm{Re}(z_2) = \sqrt{12}$
- $\mathrm{Im}(z_2) = 2$

Berechnen Sie die Ausdrücke, sofern dies möglich ist, oder geben Sie "kA" an, falls keine exakte Angabe gemacht werden kann.

$\mathrm{Im}(z_1 - z_2) =$ 2 ✔

$|z_2 - \overline{z_2}| =$ 4 ✔

$|z_1 \cdot z_2| =$ kA ✔

$\mathrm{Re}(z_2 - z_1) =$ kA ✔

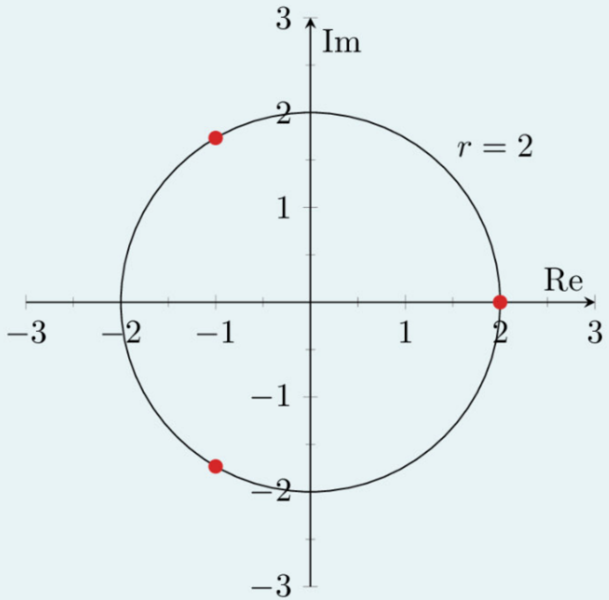
Frage 2

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Welche der untenstehenden komplexen Gleichungen hat die durch die roten Punkte dargestellte Lösungsmenge?



Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- $4z^3 = -4$
- $3z^3 = -24$
- $3z^3 = 24$ ✔
- $4z^3 = 4$

Die Antwort ist richtig.

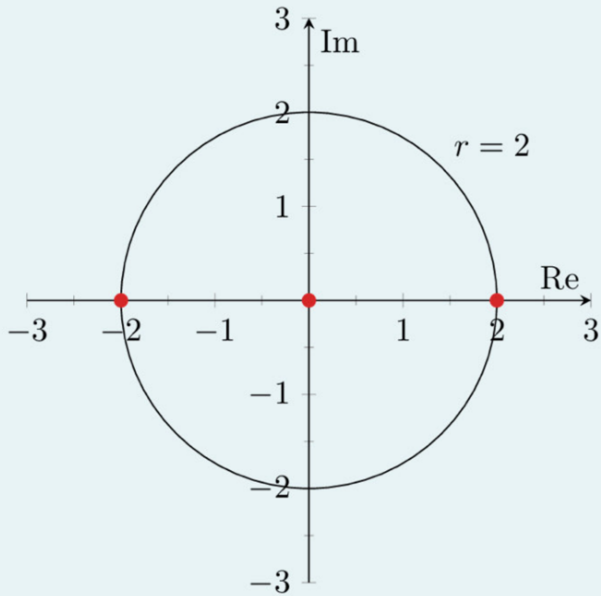
Die richtige Antwort ist: $3z^3 = 24$

Frage 3
Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Welche der untenstehenden komplexen Gleichungen hat die durch die roten Punkte dargestellte Lösungsmenge?



Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- $3z^4 = 12z^2$ ✔
- $3z^4 = -6z^2$
- $3z^4 = 6z^2$
- $3z^4 = -12z^2$

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: $3z^4 = 12z^2$

Frage **4**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

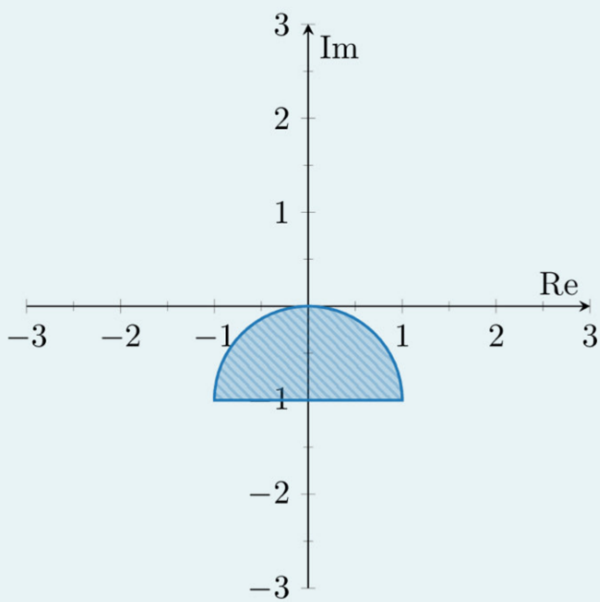
Frage markieren

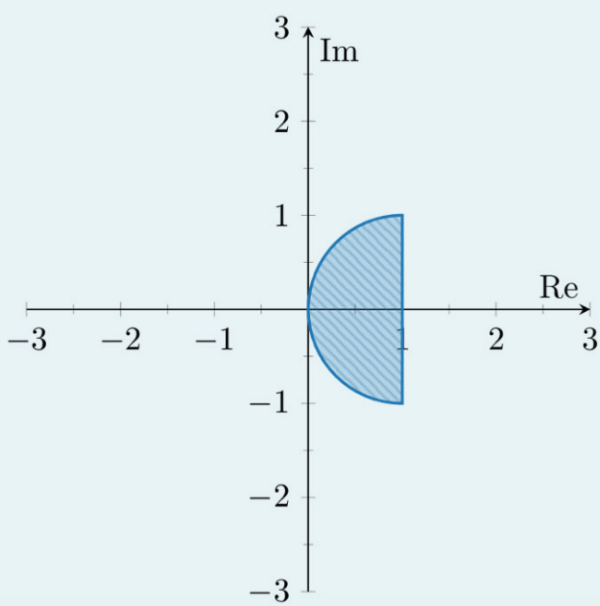
Welche der folgenden in der komplexen Ebene skizzierten Mengen gehört zu der Mengenbeschreibung?

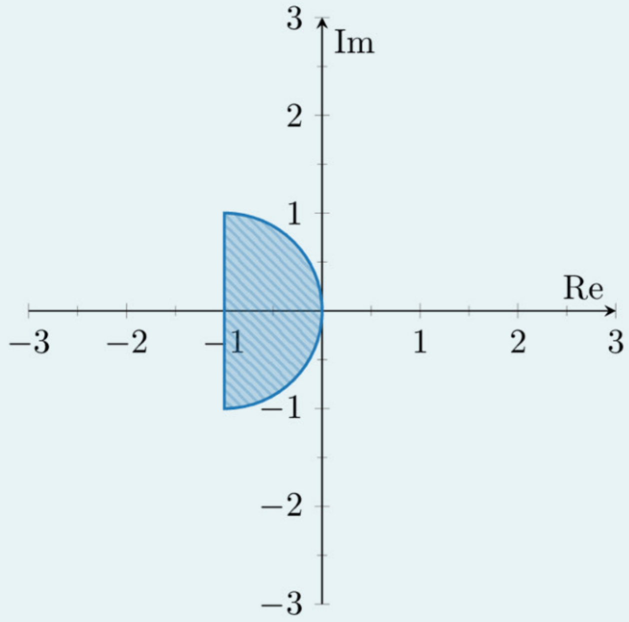
$$M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z+i| \leq 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) \geq -1 \}$$

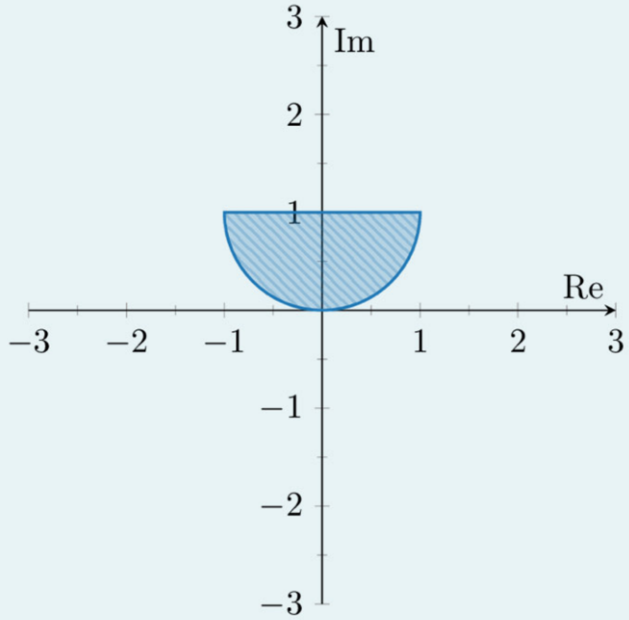
Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:






Im
Re
3
2
1
−1
−2
−3
−3 −2 −1 1 2 3


Im
Re
3
2
1
−1
−2
−3
−3 −2 −1 1 2 3

Frage 5

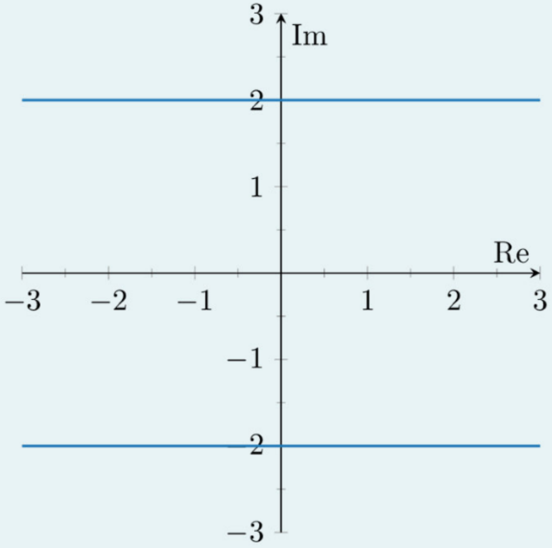
Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Welche der folgenden Mengenbeschreibungen gehört zu der in der komplexen Ebene skizzierten Menge?

Es ist genau eine Antwort richtig.



Wählen Sie eine Antwort:

- $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right| = 1 \right\}$
- $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right| = 2 \right\}$ ✔
- $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right| = 1 \right\}$
- $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right| = 2 \right\}$

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right| = 2 \right\}$

Nächste Seite ▶

Frage 6

Richtig

Erreichte Punkte 3,00 von 3,00

Frage markieren

Bestimmen Sie die Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{N}$ in der folgenden Partialbruchzerlegung.

$$\frac{x^2+5x+5}{(x+1)^3} = \frac{1}{x-A} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^C}.$$

$A =$ -1

$B =$ 3

$C =$ 3

Frage 7

Richtig

Erreichte Punkte 2,00 von 2,00

Frage markieren

Es gilt

$$\int \frac{1}{(x+2)^A} + \frac{1}{(Bx-3)^4}\, dx = -\frac{1}{x+2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(Bx-3)^3} + C$$

für $A \in \mathbb{N}$, für $B \in \mathbb{R}$, und für alle $C \in \mathbb{R}$.

Was sind A, B?

$A =$ 2

$B =$ 2

Frage 8

Richtig

Erreichte Punkte 3,00 von 3,00

Frage markieren

Bei einer Polynomdivision durch das Polynom $ax^2 + bx + c$ mit reellen Zahlen a, b, c erhalten wir

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2}(x + 1).$$

Was sind dann a, b, c?

$a =$ 4

$b =$ 2

$c =$ -6

Frage 9

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Sei

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$$

ein Polynom mit **reellen Koeffizienten** a, b, c.

Sei $11i$ eine Nullstelle des Polynoms. Welche weitere *nicht-reelle* Nullstelle hat das Polynom?

Antwort: -11i

Die richtige Antwort ist: -11i

Frage 10
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle konvergente Zahlenfolgen mit den Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -2$. Außerdem sei $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Grenzwert der zusammengesetzten Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n = (a_n)^2 \cdot b_n - \frac{a_n + 6}{b_n}.$$

Antwort: -4

Die richtige Antwort ist: -4

Frage 11
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle konvergente Zahlenfolgen und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine daraus zusammengesetzte Folge mit

$$c_n = \big(\ln((a_n)^2 + 1) + 2\big) \cdot ((a_n + 3)^2 + b_n).$$

Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, welchen Grenzwert muss dann die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben, damit $\lim_{n\to\infty} c_n = 16$ ist?

Antwort: -1

Die richtige Antwort ist: -1

Frage 12

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Gegeben sei die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{q^k}$$

für einen Parameter $q \in \mathbb{R}$. Wie muss q gewählt werden, damit $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$ gilt?

Antwort: 2

Die richtige Antwort ist: 2

Frage 13

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Gegeben sei die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{2n^4 + 2n^2 + 4}{2n^p + n^3 + 3}$$

für einen Parameter $p \in \mathbb{N}$. Geben Sie die kleinstmögliche Wahl für den Parameter p an, sodass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist.

Antwort: 4

Die richtige Antwort ist: 4

Frage 14

Richtig

Erreichte Punkte 2,00 von 2,00

Frage markieren

Gegeben sei die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{2n^3 + 4n^p + 4}{3n^3 + 3n^q + 2}$$

für zwei Parameter $p, q \in \mathbb{N}$. Wie müssen p und q gewählt werden, damit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$?

Es muss $q =$ 3 und $p =$ 3 gelten.

Frage **15**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Gegeben seien die beiden reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{5-n}{5+n}, & n \text{ gerade} \\ -1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$b_n = \begin{cases} 4, & n \text{ gerade} \\ \dfrac{8n^2+1}{2n^2+2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Antwort: 3

Die richtige Antwort ist: 3

Information

Frage markieren

In den folgenden Fragen 16-18 betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Wir zeigen im Folgenden per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ die Aussage $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ gilt.

Der Induktionsanfang wird hier vorgegeben:

Für $n = 1$ ist $\prod_{k=1}^{1} \frac{k+2}{k} = 3 = \frac{(1+1)(1+2)}{2}$. Somit ist die Aussage für $n = 1$ wahr.

Frage 16 bezieht sich nun auf die Induktionsvoraussetzung, Frage 17 auf die Induktionsbehauptung und Frage 18 auf den Induktionsschritt.

Frage 16

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Wählen Sie die Formulierung aus, die eine gültige Induktionsvoraussetzung ist. Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- Die Aussage $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ gelte für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 0.$
- Die Aussage $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N},\ n \geq 0.$
- Die Aussage $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ gelte für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$
- Die Aussage $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$ ✔

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: Die Aussage $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$

Frage **17**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Welche der folgenden Aussagen ist die Induktionsbehauptung?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- Es gilt $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$.
- Es gilt $\prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
- Es gilt $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k+1} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$.
- Es gilt $\prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$. ✔

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: Es gilt $\prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$.

Frage **18**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Der Induktionsschritt lautet nun wie folgt:

Es gilt

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+2}{k} \overset{A}{=} \frac{n+3}{n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} \overset{B}{=} \frac{n+3}{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$\overset{C}{=} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2(n+1)} \overset{D}{=} \frac{(n+2)(n+3)}{2},$$

was die Behauptung zeigt.

An welcher der Stellen A, B, C, D wird die Induktionsvoraussetzung benutzt? Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- ○ Die Induktionsvoraussetzung wird an Stelle A benutzt.
- ● Die Induktionsvoraussetzung wird an Stelle B benutzt. ✔
- ○ Die Induktionsvoraussetzung wird an Stelle C benutzt.
- ○ Die Induktionsvoraussetzung wird an Stelle D benutzt.

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: Die Induktionsvoraussetzung wird an Stelle B benutzt.

Frage 19

Richtig

Erreichte Punkte 3,00 von 3,00

Frage markieren

Bestimmen Sie die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-2x}, & x < 0 \\ 2 + 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 1 + \sqrt{bx}, & 1 \leq x < 4 \\ x^2 - x + c, & x \geq 4 \end{cases}$$

stetig ist.

$a =$ 2 ✔

$b =$ 9 ✔

$c =$ -5 ✔

Frage 20

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Bestimmen Sie den größtmöglichen Bereich für die Wahl der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f: [1, 3] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-b)^2}, & x \in [1, 2] \\ \sqrt{a(x+2)}, & x \in]2, 3] \end{cases}$$

stetig ist.

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- (•) $b \in \mathbb{R} \setminus [1, 2]$ und $a = \frac{1}{4(2-b)^4}$ ✔
- ( ) $a \geq 0$ und $b = 2 - \frac{1}{\sqrt[4]{4a}}$
- ( ) $a \geq 0$ und $b < 1$
- ( ) $b \neq 2$ und $a = \frac{1}{4(2-b)^4}$

Frage 21

Teilweise richtig

Erreichte Punkte 2,00 von 2,00

Frage markieren

Sei $f\colon]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nicht-negativ ist (das heißt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in]-\infty, 0[$), die im **offenen** Intervall $]-3, 0[$ genau zwei Nullstellen hat und die auf $]-\infty, -3]$ streng monoton fallend ist. Dann nimmt die Funktion f ihr globales Minimum im Definitionsbereich $]-\infty, 0[$ in mindestens 2 ✔ Stelle(n) und in höchstens Stelle(n) an.

Geben Sie die Antworten als Zahlen und nicht als Text an.

Frage 22

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Sei $f\colon [5, 10] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(10) < 10$. Welche der folgenden Aussagen ist auf jeden Fall wahr?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- ○ Die Funktion f ist nicht monoton.
- ○ Die Funktion f hat keine Nullstelle.
- ○ Die Funktion f ist nicht injektiv.
- ● Die Funktion f ist nach oben beschränkt. ✔

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: Die Funktion f ist nach oben beschränkt.

Frage 23

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Sei $f\colon]-2,0] \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist auf jeden Fall wahr?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- Die Funktion f hat kein globales Minimum. ✔
- Die Funktion f hat eine Nullstelle in $x = 0$.
- Das Infimum und globale Minimum von f liegt am linken Rand des Definitionsbereiches vor.
- Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq]-2,0]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = -2$, sodass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f$ gilt.

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: Die Funktion f hat kein globales Minimum.

Frage 24

Richtig

Erreichte Punkte 3,00 von 3,00

Frage markieren

Bestimmen Sie die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) + a, & x < 0 \\ -\dfrac{b}{2}x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{x-1} - \frac{c}{6}, & 1 < x \end{cases}$$

stetig und differenzierbar ist.

$a =$ 1 ✓

$b =$ -2 ✓

$c =$ -6 ✓

Frage 25

Richtig

Erreichte Punkte 3,00 von 3,00

Frage markieren

Gegeben sei die mindestens zweimal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(-1) = -6$, $f'(-1) = -1$ und $f''(-1) = -6$. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ des Taylorpolynoms zweiten Grades

$$T_2(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = -1$.

$a =$ -3 ✓

$b =$ -1 ✓

$c =$ -6 ✓

Frage **26**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(-2) = 11,\ f(2) = 3$. Welche der folgenden Aussagen ist auf jeden Fall wahr?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- Die Funktion f ist im offenen Intervall $]-2, 2[$ monoton steigend.
- Es existiert ein Punkt $\xi \in]-2, 2[$, für den $f'(\xi) = -2$ gilt. ✔
- Die Funktion f hat eine Nullstelle im offenen Intervall $]-2, 2[$.
- Die Funktion f hat eine lokale Extremstelle im offenen Intervall $]-2, 2[$.

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: Es existiert ein Punkt $\xi \in]-2, 2[$, für den $f'(\xi) = -2$ gilt.

Frage **27**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Bestimmen Sie den Parameter $a \neq 0$, sodass

$$\lim_{x \to 0} \frac{2a^2 x}{e^{ax} - 1} = 8$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die Regel von Bernoulli / de l'Hospital.

Antwort: 4 ✔

Die richtige Antwort ist: 4

Frage 28
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Für welches $b \in \mathbb{R},\ b > 0$ gilt

$$\int_0^b \sinh(x)\, dx = \frac{1}{2}(e + e^{-1}) - 1\ ?$$

Antwort: 1

Die richtige Antwort ist: 1

Frage 29
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Für welches $a \in \mathbb{R},\ a \geq 0$ gilt

$$\int_a^6 e^{-3x}\, dx = \frac{1}{3}\left(e^{-12} - e^{-18}\right)\ ?$$

Antwort: 4

Die richtige Antwort ist: 4

Frage 30
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Mit partieller Integration erhält man

$$\int_0^6 \frac{3}{2} x\sqrt{x+1}\, dx = A - \int_0^6 (x+1)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

für eine Zahl $A \in \mathbb{R}$.

Was ist A?

*Geben Sie Ihre Antwort in der Form a*b^(c/d) ein. Beispiel:* $4 \cdot 8^{\frac{3}{2}}$ *wird als* ***4*8^(3/2)*** *eingetippt.*

Antwort: 6*7^(3/2)

Frage 31

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Das unbestimmte Integral

$$\int xe^{3x}\,dx$$

soll mit Hilfe von partieller Integration umgeformt werden. Welche der folgenden Alternativen ist richtig?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- $\int xe^{3x}\,dx = 3xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx$
- $\int xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx$ ✔
- $\int xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} + \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx$
- $\int xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \int 3e^{3x}\,dx$

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: $\int xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx$

Frage 32

Teilweise richtig

Erreichte Punkte 2,00 von 2,00

Frage markieren

Um das bestimmte Integral $\int_1^2 \frac{8x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ zu berechnen, substituieren wir $t = x^2 + 3,\ dt = 2 \cdot x\,dx$ und erhalten

$$\int_1^2 \frac{8x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int_a^7 b \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$a =$ 4 , $b =$

Frage 33

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{8}{x^5}\,dx = -2.$$

Welchen Wert hat dann das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{4}{x^5}\,dx \quad ?$$

Antwort: 1

Die richtige Antwort ist: 1

Frage 34

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -|x|$.

Welche Aussage gilt für den Flächeninhalt $A > 0$ der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse? Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- $A = \left| \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \right|$ ✔
- $A = \left| \int_{-1}^{0} f(x)\, dx \right| + \int_{0}^{1} f(x)\, dx$
- $A = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \left| \int_{0}^{1} f(x)\, dx \right|$
- Keine der oben genannten Möglichkeiten ist richtig.

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: $A = \left| \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \right|$

Frage 35

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Welche kleinste Periode $T > 0$ hat die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin^5\left(\tfrac{\pi}{3}x\right)\ ?$$

Antwort: 6 ✔

Die richtige Antwort ist: 6

Frage 36
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Gegeben sei die periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2\sin(2x) + 3\sin(4x)$ mit Periode $T = \pi$.

Bestimmen Sie den Fourier-Koeffizienten b_1 von f.

Antwort: 2

Die richtige Antwort ist: 2

Frage 37
Richtig
Erreichte Punkte 1,00 von 1,00
Frage markieren

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(x) + 4\cos(4x)$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Es ist genau eine Antwort richtig.

- Für $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\, dx$ gilt: $a_k \neq 0$ mit $k \in \mathbb{N}$.
- f ist gerade.
- Alle Fourierkoeffizienten sind ungleich 0.
- f ist streng monoton fallend.

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist:
f ist gerade.

Frage 38

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{6,3}$. Welcher der folgenden Terme ist definiert?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- $AB^T + I_6$ ✓
- $AB^T + I_3$
- $(AB)^T + I_6$
- $AB + I_3$

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: $AB^T + I_6$

Frage 39

Richtig

Erreichte Punkte 2,00 von 2,00

Frage markieren

Sei $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ definiert durch $B\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $B\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Berechnen Sie $B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ mit

$x_1 =$ 3 ✓ und $x_2 =$ -3 ✓ .

Frage **40**

Richtig

Erreichte Punkte 3,00 von 3,00

Frage markieren

Bestimmen Sie die Koordinaten der Matrix $A = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ bezüglich der folgenden Basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Es gilt $A = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

wobei $\alpha_1 =$

5 ✔ und $\alpha_2 =$

5 ✔ und $\alpha_3 =$

5 ✔ .

Frage **41**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Gegeben sei die folgende Menge im $\mathbb{R}^3$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Untersuchen Sie, ob die Menge M eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- Die Menge M ist keine Basis des $\mathbb{R}^3$. Die Vektoren in M sind zwar linear unabhängig, bilden aber kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.
- Die Menge M ist keine Basis des $\mathbb{R}^3$. Die Vektoren in M bilden zwar ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$, sind aber nicht linear unabhängig.
- Die Menge M ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
- Die Menge M ist keine Basis des $\mathbb{R}^3$. Die Vektoren in M sind weder linear unabhängig, noch bilden sie ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. ✔

Frage **42**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- ○ Die Matrix A ist in Zeilenstufenform und in normierter Zeilenstufenform.
- ● Die Matrix A ist in Zeilenstufenform, aber nicht in normierter Zeilenstufenform. ✔
- ○ Die Matrix A ist weder in Zeilenstufenform, noch in normierter Zeilenstufenform.
- ○ Die Matrix A ist in normierter Zeilenstufenform, aber nicht in Zeilenstufenform.

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: Die Matrix A ist in Zeilenstufenform, aber nicht in normierter Zeilenstufenform.

Frage **43**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Es sei $A \in \mathbb{R}^{3,5}$ und die normierte Zeilenstufenform von A sei gegeben durch

$$\mathrm{NZSF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von A, d.h. $\dim(\mathrm{Bild}(A))$.

Antwort: 3 ✔

Frage **44**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Gegeben sei eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit inverser Matrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- $\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -14 \\ -8 \end{bmatrix} \right\}$ ✔
- $\mathbb{L} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} -14 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$
- $\mathbb{L} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} -14 \\ -8 \end{bmatrix} \right\}$
- $\mathbb{L} = \mathbb{R}^2$

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -14 \\ -8 \end{bmatrix} \right\}$

Frage 45

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Gegeben sei der Teilraum

$$L = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ von } \mathbb{R}^5.$$

Welche Dimension hat der Teilraum L?

Antwort: 2

Die richtige Antwort ist: 2

Frage 46

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Man betrachte den Teilraum

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = 0 \text{ und } b + c = 0 \right\}$$

von $\mathbb{R}^{2,2}$. Welche der folgenden Mengen ist eine Basis von T?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \right\}$ ✔
- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Frage 46

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Man betrachte den Teilraum

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = 0 \text{ und } b + c = 0 \right\}$$

von $\mathbb{R}^{2,2}$. Welche der folgenden Mengen ist eine Basis von T?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \right\}$ ✔
- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \right\}$

Frage 47

Richtig

Erreichte Punkte 2,00 von 2,00

Frage markieren

Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Frage **47**

Richtig

Erreichte Punkte 2,00 von 2,00

Frage markieren

Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $L\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Dann gilt $x_1 =$ 5 ✔ und $x_2 =$ -1 ✔ .

Frage **48**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^{2,2},$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d \mapsto \begin{bmatrix} a+b & 2a+2b \\ 3c-3d & 2a \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Kern von L, d.h. $\mathrm{Kern}(L)$.

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- ○ Es gilt $\mathrm{Kern}(L) = \mathrm{span}\{x^3 - x^2, x + 1\}$.
- ○ Es gilt $\mathrm{Kern}(L) = \{0\}$.
- ○ Es gilt $\mathrm{Kern}(L) = \mathrm{span}\{x, 1\}$.
- ● Es gilt $\mathrm{Kern}(L) = \mathrm{span}\{x + 1\}$. ✔

Die Antwort ist richtig.

Frage **49**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Sei $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 8} \to \mathbb{R}^{8,2}$ eine lineare Abbildung mit $\dim(\mathrm{Kern}(L)) = 7$. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von L, d.h. $\dim(\mathrm{Bild}(L))$.

Antwort: 2

Die richtige Antwort ist: 2

Frage 50

Richtig

Erreichte Punkte 2,00 von 2,00

Frage markieren

Sei $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ eine Matrix mit QR-Zerlegung $A = QR$, wobei die orthogonale Matrix Q gegeben ist durch

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und die Inverse der oberen Dreiecksmatrix R gegeben ist durch

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ eine Lösung für das Gleichungssystem $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, wobei $x_1 =$ 3 ✓ und $x_2 =$ -6 ✓ .

Frage 51

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{9,9}$ invertierbar. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

Es ist genau eine Antwort richtig.

- ○ $\det(-A^T B^T C^{-1} D^{-1}) = -(\det(A) + \det(B) - \det(C) - \det(I$
- ○ $\det(-A^T B^T C^{-1} D^{-1}) = \det(A)\det(B)\det(C)^{-1}\det(D)^{-1}$
- ● $\det(-A^T B^T C^{-1} D^{-1}) = -\det(A)\det(B)\det(C)^{-1}\det(D)^{-1}$ ✓
- ○ $\det(-A^T B^T C^{-1} D^{-1}) = \det(A) + \det(B) - \det(C) - \det(D)$

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: $\det(-A^T B^T C^{-1} D^{-1}) = -\det(A)\det(B)\det(C)^{-1}\det(D)^{-1}$

Frage 52

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Matrix $M_x = \begin{bmatrix} 2 & x & -2 \\ 2x & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \det(M_x)$.

Die Funktion f ist ein Polynom. Bestimmen Sie den Grad von f.

Antwort: 2

Die richtige Antwort ist: 2

Frage 53

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Betrachten Sie das Parallelogram $P \subseteq \mathbb{R}^2$, das durch die Vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ aufgespannt wird.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von P.

Antwort: 4

Die richtige Antwort ist: 4

Frage 54

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$. Was ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda = 9$?

Antwort: 1

Die richtige Antwort ist: 1

Frage 55

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ist diagonalisierbar. Ist $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des Eigenraums von A zum Eigenwert $\lambda = 3$?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- Nein, denn die Menge $\mathcal{B}$ ist linear abhängig.
- Nein, denn die Menge $\mathcal{B}$ erzeugt den Eigenraum nicht. ✔
- Ja.
- Nein, denn $\mathcal{B}$ ist keine Teilmenge des Eigenraums.

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: Nein, denn die Menge $\mathcal{B}$ erzeugt den Eigenraum nicht.

Frage **56**

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Sei $A \in \mathbb{R}^{5,5}$ eine Matrix, die ausschließlich die Eigenwerte 2 und 3 hat. Die Eigenräume $V_\lambda(A)$, $\lambda = 2, 3$, seien wie folgt gegeben:

$$V_2(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{und} \qquad V_3(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ist solch eine Matrix A diagonalisierbar?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- (•) Nein, keine solche Matrix A ist diagonalisierbar. ✔
- ( ) Ja, jede solche Matrix A ist diagonalisierbar.
- ( ) Es gibt sowohl diagonalisierbare als auch nicht-diagonalisierbare Matrizen A, die dieser Beschreibung entsprechen.
- ( ) Für jeden Eigenwert von A stimmt die geometrische Vielfachheit mit der algebraischen Vielfachheit überein.

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: Nein, keine solche Matrix A ist diagonalisierbar.

Frage 57

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Sei $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ diagonalisierbar mit Diagonalmatrix

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

Es ist genau eine Antwort richtig.

Wählen Sie eine Antwort:

- Es gilt $\det(A) = 105$.
- Es gilt $A = A^\top$.
- Es existiert ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}$, sodass $A\vec{x} = -7\vec{x}$. ✔
- Es gilt $\operatorname{Rang}(A) = 3$.

Die Antwort ist richtig.

Die richtige Antwort ist: Es existiert ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}$, sodass $A\vec{x} = -7\vec{x}$.

Frage 58

Richtig

Erreichte Punkte 1,00 von 1,00

Frage markieren

Für zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ definieren wir das folgende Skalarprodukt: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2$. Finden Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass der Vektor $\begin{bmatrix} a \\ 3 \end{bmatrix}$ orthogonal ist zu $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ bezüglich des oben definierten Skalarproduktes.

Antwort: -2 ✔

Die richtige Antwort ist: -2