Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik **Wintersemester 2023**
Dozenten: S. Keiper, R. Nabben
Assistenten: J. Halbey, M. Hammer, R. Hoesfeld, P. Wiechmann, 21. Februar 2024

Modulprüfung – Lösungsskizze
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

1. Aufgabe (Multiple Choice) (20 Punkte)

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. In jeder Teilaufgabe ist **genau eine** Antwortmöglichkeit korrekt. Markieren Sie richtige Antworten so: (☑ oder ☒). Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt. Im Falle einer Korrektur füllen Sie bitte Kästchen, die nicht berücksichtigt werden sollen, vollständig aus (■).

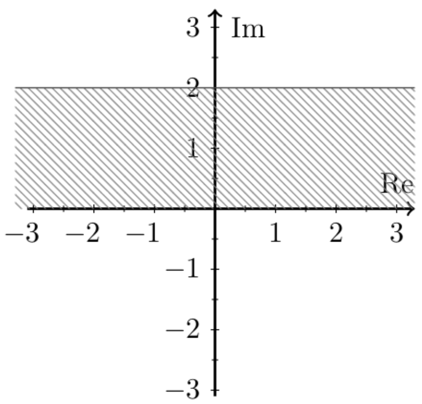
a) Sei $f : [0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(x)$ und $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $g(x) = (x-1)^4$. Welche der folgenden Aussagen über die Komposition $g \circ f : [0, \frac{\pi}{2}[\to [0, \infty[$ ist wahr?

☐ $g \circ f$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
☐ $g \circ f$ ist bijektiv.
☑ $g \circ f$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
☐ $g \circ f$ ist weder injektiv noch surjektiv.

b) Wie viele verschiedene komplexe Lösungen hat die Gleichung $z^{10} = (z^3(1+i)^2)^2$?

☐ keine ☐ 1 ☐ 2 ☑ 5

c) Es sei M die durch Schraffierung markierte Teilmenge von $\mathbb{C}$. (Die durchgezogene Linie gehört zur Menge.) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?



☐ $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z) + 1| \leq 1\}$.
☐ $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z) + 1| \geq 1\}$.
☑ $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z) - 1| \leq 1\}$.
☐ $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z) - 1| \geq 1\}$.

d) Seien p und q zwei reelle Polynome mit $\deg(p) = \deg(q) + 1$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

☐ Es gibt ein Polynom s mit $\deg(s) = 1$ und $p(x) = q(x)s(x)$.
☑ Es gibt mindestens ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0)q(x_0) = 0$.
☐ q hat höchstens so viele reelle Nullstellen, wie p.
☐ Keine der obigen Aussagen ist im Allgemeinen wahr.

e) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $a_n^2 \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

☑ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.
☐ $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$.
☐ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{b_n} = 1$.
☐ Keine der obigen Aussagen ist im Allgemeinen wahr.

f) Sei $\mathcal{M} = \{3t+1, -t^2-2, \frac{t^2}{2}+1\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- [ ] $\mathcal{M}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.
- [ ] $\mathcal{M}$ ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, aber nicht linear unabhängig.
- [ ] $\mathcal{M}$ ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.
- [x] $\mathcal{M}$ ist weder linear unabhängig, noch ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

g) Sei $\mathcal{V} = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A = A^T\}$ der Vektorraum der symmetrischen (2×2)-Matrizen. Welche der folgenden Mengen ist eine Basis von $\mathcal{V}$?

- [x] $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\}$
- [ ] $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$
- [ ] $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\}$
- [ ] $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

h) Seien $n \neq m$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n,m}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist definiert?

- [ ] $AB + I_n$
- [ ] $(AB)^T + I_n$
- [x] $AB^T + I_n$
- [ ] $A^T B + I_n$

i) Sei A eine invertierbare Matrix und $c \in \mathbb{R}$. Welche Aussage gilt im Allgemeinen nicht?

- [ ] $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- [x] $(cA)^{-1} = cA^{-1}$.
- [ ] $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^{-1})$.
- [ ] $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

j) Seien $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, sodass $A\vec{x} = \vec{b}$ unendlich viele Lösungen besitzt. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- [ ] $\mathrm{Rang}(A) < \mathrm{Rang}([A \,|\, \vec{b}])$
- [ ] $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}([A \,|\, \vec{b}]) = m$
- [x] $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}([A \,|\, \vec{b}]) < m$
- [ ] $\mathrm{Rang}(A) > \mathrm{Rang}([A \,|\, \vec{b}])$

k) Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben mit $f\left(\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$. Was trifft dann zu?

- [ ] $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 0$
- [ ] $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 2$
- [x] $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 1$
- [ ] $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 3$

l) Sei $f\colon [4,7[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und monoton wachsend mit $f(5) > 7$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- [ ] f besitzt ein globales Maximum.
- [x] f ist nach unten beschränkt.
- [ ] f ist nach oben beschränkt.
- [ ] Es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in [4,7[$.

m) Sei $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f\left(\frac{1}{2}\right) > 2$ und $f\left(-\frac{1}{2}\right) < -1$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☐ f besitzt ein globales Minimum.
- ☐ f hat im Intervall $[-1,1]$ eine Nullstelle.
- ☐ f ist monoton wachsend.
- ☑ Keine der obigen Aussagen ist im Allgemeinen wahr.

n) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Seien weiter T_n das n-te Taylorpolynom von f und R_n das n-te Restglied im Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☐ R_n ist ein Polynom vom Grad $n+1$.
- ☐ R_n hat n verschiedene Nullstellen.
- ☑ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.
- ☐ $\deg(T_n) = n$.

o) Das Fourierpolynom n-ter Ordnung der stetigen π-periodischen Funktion f sei gegeben durch

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2kt)}{1-4k^2}.$$

Dann gilt:

- ☐ φ_n ist $\frac{\pi}{2}$-periodisch.
- ☐ φ_n ist nicht periodisch.
- ☑ f ist gerade.
- ☐ f ist ungerade.

p) Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit charakteristischem Polynom $p_A(t) = (1-t)^2(-3-t)$. Dann ist die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$

- ☑ injektiv und surjektiv.
- ☐ injektiv, aber nicht surjektiv.
- ☐ nicht injektiv, aber surjektiv.
- ☐ weder injektiv noch surjektiv.

q) Welche Menge bildet eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bzgl. des Standardskalarproduktes?

- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$
- ☑ $\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

r) Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ und mit geometrischen Vielfachheiten $g(0) = 2$ und $g(2) = 1$. Dann ist A

- ☐ invertierbar und diagonalisierbar.
- ☐ invertierbar, aber nicht diagonalisierbar.
- ☑ nicht invertierbar, aber diagonalisierbar.
- ☐ weder invertierbar noch diagonalisierbar.

s) Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit charakteristischem Polynom $p_A(t) = -t^3 - 7t^2 - 15t - 9$. Welcher Wert ist ein Eigenwert von A?

- [ ] 1
- [ ] 0
- [x] -1
- [ ] -2

t) Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine unitäre Matrix. Welche der folgenden Aussagen gilt dann **nicht**?

- [ ] $\det(A) = e^{i\varphi}$ für $\varphi \in \mathbb{R}$
- [x] $A^T = A^{-1}$
- [ ] $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$
- [ ] $\operatorname{rang}(A) = n$

2. Aufgabe (Komplexe Zahlen) (5 Punkte)

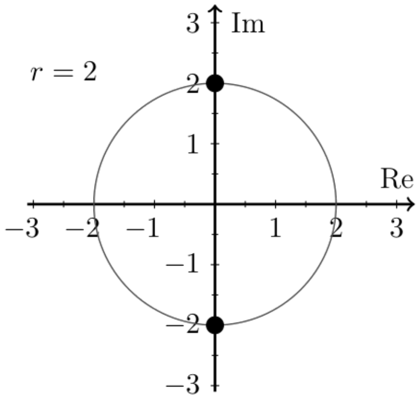
a) (3 Punkte) Es seien komplexe Zahlen z_1, z_2 gegeben, über die Folgendes bekannt ist

$$\mathrm{Re}(z_1) = 1, \qquad |z_1| = \sqrt{10}, \qquad \mathrm{Im}(z_2) = 6, \qquad \mathrm{Re}(z_1 + z_2) = 4.$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

$\lvert\mathrm{Im}(z_1)\rvert = 3$	$\lvert z_2\rvert = \sqrt{45}$	$\mathrm{Re}(z_1 + iz_2) = -5$

b) (2 Punkte) Geben Sie die eindeutigen Parameter $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{Z}$ an, sodass die Gleichung $z^a = b$ die in der Abbildung markierte Lösungsmenge besitzt.



$a = 2$	$b = -4$

3. Aufgabe (Polynome und Rationale Funktionen) (5 Punkte)

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationale Funktion r,

$$r(x) = \frac{x+10}{x^2+2x-8}.$$

$r(x) = \frac{-1}{x+4} + \frac{2}{x-2}$

b) (2 Punkte) Gegeben seien die Polynome

$$p(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 12x - 3 \quad \text{und} \quad q(x) = x^2 + 4x - 1.$$

Bestimmen Sie den Grad des Polynoms $p \cdot q$ und berechnen Sie das Polynom $s = \frac{p}{q}$ (Polynomdivision).

$\deg(p \cdot q) = 6$ $s(x) = x^2 + 3$

4. Aufgabe (Zahlenfolgen und Konvergenz) (6 Punkte)

a) (3 Punkte) Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, welche durch

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\log(n+1))^2}{n}, \\ b_n &= \frac{3n^7+3n^5-n^3+9}{7n^3(n+3)^4}, \\ c_n &= e^{\frac{1}{n}}(\sin(n)-\sin(-n)), \end{aligned}$$

gegeben sind, auf Konvergenz.

Geben Sie jeweils den Grenzwert an, falls die Folge konvergiert und schreiben Sie „existiert nicht“, falls der Grenzwert nicht existiert.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{7}$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} c_n$ e.n.

b) (2 Punkte) Gegeben sei die konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche rekursiv definiert ist durch

$$a_0 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{7a_n - 5}{8}.$$

Bestimmen Sie das Folgenglied a_2 und den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$a_2 = \frac{9}{8}$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} a_n = -5$

c) (1 Punkt) Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\frac{n\sqrt{e^{1+\frac{1}{n}}}}{n+1} \leq a_n \leq \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n.$$

Geben Sie den Grenzwert an, falls jede solche Folge konvergiert und schreiben Sie „existiert nicht“, falls der Grenzwert im Allgemeinen nicht existiert.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{e}$

5. Aufgabe (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) (9 Punkte)

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a(x+1)}{\sqrt{-x}}, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 3 - \sqrt{bx}, & 1 \leq x, \end{cases}$$

stetig ist.

$a = 0$	$b = 4$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie den maximalen Bereich $D \subseteq \mathbb{R}$, auf dem die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \ln(x^4 + 2x^2 + 3)$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$.

$D = \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{4x^3+4x}{x^4+2x^2+3}$

c) (3 Punkte) Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit dem Taylorpolynom

$$T_2(x) = -3(x-1) + 2(x-1)^2$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Bestimmen Sie $f(1)$, $f'(1)$ und $f''(1)$.

$f(1) = 0$	$f'(1) = -3$	$f''(1) = 4$

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mit der Regel von Bernoulli/de l'Hospital.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos(x)} = 6$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-x}{e^{-x}} = 0$

6. Aufgabe (Integration) (11 Punkte)

a) (3 Punkte)
Um das unbestimmte Integral $\int x^3 \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$ zu berechnen, formen wir es mittels partieller Integration um und erhalten

$$\int x^3 \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = a \cdot x^b \cdot e^{-x} - c\int x^2 \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a, b und c.

$a = -1$	$b = 3$	$c = -3$

b) (3 Punkte) Um das Integral $\int_0^1 e^{2x-1}\,\mathrm{d}x$ zu berechnen, nutzen wir die Substitutionsregel mit $t = 2x - 1$ und erhalten

$$\int_0^1 e^{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int_a^b c \cdot e^t\,\mathrm{d}t$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a, b und c.

$a = -1$	$b = 1$	$c = \frac{1}{2}$

c) (2 Punkte) Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{und} \quad f(3) = 2.$$

Bestimmen Sie folgende Integrale.

$\int_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$	$\int_0^3 x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = 5$

d) (3 Punkte) Entscheiden Sie jeweils, ob die beiden folgenden uneigentlichen Integrale existieren. Falls das uneigentliche Integral existiert, geben Sie seinen Wert an; andernfalls schreiben Sie „existiert nicht“.

$\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$	$\int_{-\infty}^0 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ existiert nicht	$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ existiert nicht

7. Aufgabe (Matrizen, Vektorräume und Lineare Abbildungen) (11 Punkte)

a) (2 Punkte) Gegeben sei $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2ia + b \\ 3ic \end{bmatrix}$. Finden Sie eine Matrix A, sodass $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ für alle $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$ gilt und bestimmen Sie Kern(f).

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3i \end{bmatrix} \qquad \text{Kern}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ -2it \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{C} \right\}$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform (NZSF), sowie den Rang und die Dimension des Kerns von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}.$$

$$\text{NZSF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Rang}(A) = 2 \qquad \dim(\text{Kern}(A)) = 2$$

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}_K$ des Kerns und eine Basis $\mathcal{B}_B$ des Bildes von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Lösungsmenge $\mathbb{L}(A, b)$ von $Ax = b$ für $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\mathcal{B}_K = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{L}(A, b) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

d) (2 Punkte) Seien $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, und $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit

$$f(a) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad f(b) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stellen Sie $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ als Linearkombination von a und b dar und bestimmen Sie $f(c)$.

c = 3a-b $\qquad$ $f(c) = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$

e) (1 Punkt) Gegeben sei die folgende Basis des $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie den Vektor $a \in \mathbb{R}^4$, welcher bzgl. $\mathcal{B}$ den Koordinatenvektor

$$K_{\mathcal{B}}(a) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

hat.

$a = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. Aufgabe (Determinante, Eigenwerte und Skalarprodukte) (13 Punkte)

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Determinanten von

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\det(A) = -10$ $\det(B) = 42$

b) (2 Punkte) Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{5,5}$ mit $\det(A) = 4, \det(B) = 8$ und $\det(C) = 3$. Bestimmen Sie $\det(A^T B^{-1})$ und $\det(-C)$.

$\det(A^T B^{-1}) = \frac{1}{2}$ $\det(-C) = -3$

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_A von $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

$p_A(z) = z^2 - 9z + 2 = (3 - z)(6 - z) - 16$

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda = 4$ von

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

$a(4) = 2$ $g(4) = 1$

e) (2 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ die Matrix mit

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3,3}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3,3}$, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt.

$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

f) (2 Punkte) Wir betrachten das folgende Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 4x_1y_1 + 2x_2y_2.$$

Bestimmen Sie $z_1 \in \mathbb{R}$, sodass $\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ orthogonal zu $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ist.

$z_1 = 3$

Bestimmen Sie $\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|$ für die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm.

$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Hinweis: Die induzierte Norm ist definiert als $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

g) (2 Punkte) Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\| \cdot \|$ und seien $u, v \in V$ orthonormal. Bestimmen Sie $\langle 2u + v, 3v \rangle$ und $\|2u + v\|^2$.

$\langle 2u + v, 3v \rangle = 3$ $\qquad$ $\|2u + v\|^2 = 5$