Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik **Wintersemester 2023**
Dozenten: S. Keiper, R. Nabben
Assistenten: J. Halbey, M. Hammer, R. Hoesfeld, P. Wiechmann, 12. Februar 2024

Probeklausur – Lösungsskizze
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

1. Aufgabe (Multiple Choice) (10 Punkte)

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. In jeder Teilaufgabe ist **genau eine** Antwortmöglichkeit korrekt. Markieren Sie richtige Antworten so: (☑ oder ☒). Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt. Im Falle einer Korrektur füllen Sie bitte Kästchen, die nicht berücksichtigt werden sollen, vollständig aus (■).

a) Gegeben sei eine komplexe Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☐ $|z|^2 = a^2 + (ib)^2$
- ☑ $|z|^2 = a^2 - (ib)^2$
- ☐ $|z|^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ☐ $|z|^2 = (a + bi)^2$

b) Gegeben seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Weiter sei $a_n \geq b_n^2 > 0$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☐ $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ☑ $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist im Allgemeinen wahr.

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(-2) = -9$ und $f(1) = 2$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☐ f besitzt eine Extremstelle im Intervall $(-2, 1)$.
- ☑ Es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = x_0^3$.
- ☐ f ist monoton wachsend.
- ☐ f hat genau eine Nullstelle im Intervall $(-2, 1)$.

d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$-mal differenzierbare Funktion mit $f^{(k)}(x_0) = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$. Weiter sei R_n das Restglied des n-ten Taylorpolynoms T_n von f im Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☐ x_0 ist eine Extremstelle von f.
- ☑ $R_n = f$
- ☐ $R_n(x_0) \neq 0$
- ☐ f ist konstant.

e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar und

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☑ F ist stetig.
- ☐ F ist monoton.
- ☐ F ist beschränkt.
- ☐ $F(x)^2 = \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$

f) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 3-periodische Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- [x] Für den Fourierkoeffizient b_0 von f gilt $b_0 = 0$.
- [ ] f ist ungerade.
- [ ] f ist monoton steigend.
- [ ] f ist stetig.

g) Sei $n \geq 2$. Welche der folgenden Mengen ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^{n,n}$?

- [ ] $\{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det(A) = 1\}$
- [ ] $\{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \operatorname{Rang}(A) = 1\}$
- [x] $\{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A = A^T\}$
- [ ] $\{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A \text{ invertierbar}\}$

h) Sei $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear und injektiv. Sei weiter $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und sei $\mathcal{M} = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- [ ] $\mathcal{M}$ ist eine Basis von $\mathcal{W}$.
- [x] $\mathcal{M}$ ist linear unabhängig, aber im Allgemeinen keine Basis von $\mathcal{W}$.
- [ ] $\mathcal{M}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathcal{M}$, aber im Allgemeinen nicht linear unabhängig.
- [ ] $\mathcal{M}$ ist weder ein Erzeugendensystem von $\mathcal{M}$ noch linear unabhängig.

i) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- [ ] $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$
- [ ] $\det((AB)^{-1}) = -\det(A)\det(B)$
- [ ] $\det((A + B)^{-1}) = \det(A^{-1}) + \det(B^{-1})$
- [x] $\det(AB^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)}$

j) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Seien weiter $a(\lambda_1, A), \ldots, a(\lambda_k, A)$ und $g(\lambda_1, A), \ldots, g(\lambda_k, A)$ ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- [ ] $a(\lambda_j, A) = g(\lambda_j, A)$ für $j = 1, \ldots, k$
- [x] $\sum_{j=1}^{k} g(\lambda_j, A) \geq k$
- [ ] $\sum_{j=1}^{k} g(\lambda_j, A) = n$
- [ ] $\sum_{j=1}^{k} a(\lambda_j, A) = k$

2. Aufgabe (Komplexe Zahlen) (3 Punkte)

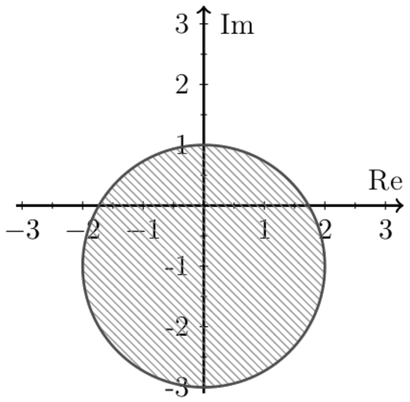
a) (2 Punkte) Es seien komplexe Zahlen z_1, z_2 gegeben, über die Folgendes bekannt ist

$$\mathrm{Im}(z_1) = 3, \qquad \mathrm{Re}(z_2) = 2, \qquad |z_1| = 5.$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

$\mathrm{Im}(z_1 - iz_2) = 1$ $|iz_1| = 5$

b) (1 Punkt) Beschreiben Sie die durch Schraffierung markierte Menge. (Die durchgezogene Linie gehört zur Menge.)



$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z + i| \leq 2 \right\}$$

3. Aufgabe (Polynome und Rationale Funktionen) (3 Punkte)

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie $A, B \in \mathbb{R}$ in folgender Partialbruchzerlegung.

$$\frac{-2x+6}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$A = -4$ $B = 2$

b) (1 Punkte) Gegeben seien die Polynome

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \quad \text{und} \quad q(x) = x^2 + x - 6.$$

Bestimmen Sie das Polynom $s = \frac{p}{q}$ (Polynomdivision).

$s(x) = x - 4$

4. Aufgabe (Zahlenfolgen und Konvergenz) (4 Punkte)

a) (2 Punkte) Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche durch

$$a_n = \frac{\cos(\pi n)n^2}{n^2+1} \qquad \text{und} \qquad b_n = (2\arctan(\sqrt{n}) - \pi)(-1)^n,$$

gegeben sind, auf Konvergenz.

Geben Sie jeweils den Grenzwert an, falls die Folge konvergiert und schreiben Sie „existiert nicht", falls der Grenzwert nicht existiert.

$\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht $\qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

b) (1 Punkt) Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ und

$$\frac{1}{4} < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \frac{1}{2}.$$

Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz.

Geben Sie den Grenzwert an, falls jede solche Folge konvergiert und schreiben Sie „existiert nicht", falls der Grenzwert im Allgemeinen nicht existiert.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

c) (1 Punkt) Gegeben sei die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q^k},$$

welche vom Parameter $q > 0$ abhängt. Bestimmen Sie q, sodass $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ gilt.

$q = \frac{5}{4}$

5. Aufgabe (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) (4 Punkte)

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Ableitung von $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\cos(x^2))$.

$f'(x) = -\frac{2x\sin(x^2)}{\cos(x^2)} = -2x\tan(x^2)$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} a\sin(x) + 3, & x \leq 0, \\ x^2 + (2+2b)x + b, & x > 0, \end{cases}$$

differenzierbar ist.

$a = 8$	$b = 3$

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie folgenden Grenzwert mit der Regel von Bernoulli/de l'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(-5x)}{e^{4x} - 1} = -\frac{5}{4}$$

6. Aufgabe (Integration und Fourieranalysis) (6 Punkte)

a) (1 Punkt) Berechnen Sie folgendes Integral.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cosh(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{e - e^{-1}}{4}$$

b) (2 Punkte) Geben Sie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g, h \neq 0$ an, sodass gilt:

$$\int (x^2+1)\ln(x)\,\mathrm{d}x = g(x) - \int h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Verwenden Sie partielle Integration.

$g(x) = (\frac{1}{3}x^3 + x)\ln(x)$	$h(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$

c) (1 Punkte) Um das Integral $\int \frac{\arctan(-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ zu berechnen, nutzen wir die Substitutionsregel mit $t = \arctan(-x)$ und erhalten

$$\int \frac{\arctan(-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int a \cdot t^2\,\mathrm{d}t$$

für ein $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a.

$a = -1$

d) (2 Punkte) Gegeben sei die 4-periodische Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 5\sin(\pi x).$$

Bestimmen Sie folgende Fourierkoeffizienten von f.

$a_0 = 4$	$b_2 = -5$

7. Aufgabe (Matrizen, Vektorräume und Lineare Abbildungen) (6 Punkte)

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform (NZSF) und den Rang von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

$\mathrm{NZSF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathrm{Rang}(A) = 2$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}_K$ des Kerns von A und die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$ für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$\mathcal{B}_K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$	$\mathbb{L}(A, \vec{b}) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

c) (1 Punkt) Seien $\mathcal{V}$ ein zweidimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von $\mathcal{V}$ mit der zugehörigen Basiswechselmatrix

$$T_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$.

$T_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) (1 Punkt) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \qquad f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}, \qquad \text{und} \qquad f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $f\left(\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}\right)$.

$$\boxed{f\left(\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}}$$

8. Aufgabe (Determinante, Eigenwerte und Skalarprodukte) (4 Punkte)

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_A von

$$A = \begin{bmatrix}0 & 7 & 5\\0 & 3 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

$$\boxed{p_A(z) = z(z-2)^2}$$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda = 2$ von

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3},$$

sowie eine Basis des zugehörigen Eigenraums V_2.

$$\boxed{a(2, A) = 2 \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}}$$

c) (1 Punkt) Wir betrachten das Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2$$

auf $\mathbb{R}^2$ und die davon induzierte Norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Bestimmen Sie ein $\vec{u} \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}$ mit $\|\vec{u}\| = 1$.

$$\boxed{\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}}$$