Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozenten: S. Keiper, R. Nabben
Assistenten: J. Halbey, M. Hammer, R. Hoesfeld, P. Wiechmann,

Wintersemester 2023
21. Februar 2024

Probeklausur
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Erklärung:

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§63 Abs. 2 Satz 3 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt und andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§61 Abs. 1 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren werden nicht gewertet.
- In Aufgabe 1 ist jeweils die richtige Aussage anzukreuzen. Es ist immer genau eine Aussage richtig. Bei Ankreuzen mehrerer Aussagen in einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt.
- In den Aufgaben 2 bis 8 ist nur das Ergebnis gefragt. Geben Sie keine Rechenwege an.

Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 120 Minuten.

In der Klausur sind maximal 80 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 40 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

1. Aufgabe (Multiple Choice) (20 Punkte)

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. In jeder Teilaufgabe ist **genau eine** Antwortmöglichkeit korrekt. Markieren Sie richtige Antworten so: (☑ oder ☒). Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt. Im Falle einer Korrektur füllen Sie bitte Kästchen, die nicht berücksichtigt werden sollen, vollständig aus (■).

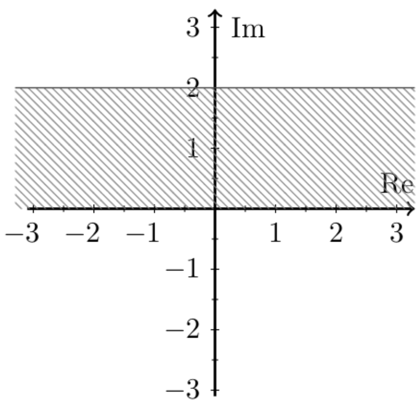
a) Sei $f : [0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(x)$ und $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $g(x) = (x-1)^4$. Welche der folgenden Aussagen über die Komposition $g \circ f : [0, \frac{\pi}{2}[\to [0, \infty[$ ist wahr?

- ☐ $g \circ f$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
- ☐ $g \circ f$ ist bijektiv.
- ☐ $g \circ f$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- ☐ $g \circ f$ ist weder injektiv noch surjektiv.

b) Wie viele verschiedene komplexe Lösungen hat die Gleichung $z^{10} = (z^3(1+i)^2)^2$?

- ☐ keine
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 5

c) Es sei M die durch Schraffierung markierte Teilmenge von $\mathbb{C}$. (Die durchgezogene Linie gehört zur Menge.) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?



- ☐ $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z) + 1| \le 1\}$.
- ☐ $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z) + 1| \ge 1\}$.
- ☐ $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z) - 1| \le 1\}$.
- ☐ $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z) - 1| \ge 1\}$.

d) Seien p und q zwei reelle Polynome mit $\deg(p) = \deg(q) + 1$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☐ Es gibt ein Polynom s mit $\deg(s) = 1$ und $p(x) = q(x)s(x)$.
- ☐ Es gibt mindestens ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0)q(x_0) = 0$.
- ☐ q hat höchstens so viele reelle Nullstellen, wie p.
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist im Allgemeinen wahr.

e) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $a_n^2 \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☐ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$.
- ☐ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{b_n} = 1$.
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist im Allgemeinen wahr.

f) Sei $\mathcal{M} = \{3t+1, -t^2-2, \frac{t^2}{2}+1\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ $\mathcal{M}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.
- ☐ $\mathcal{M}$ ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, aber nicht linear unabhängig.
- ☐ $\mathcal{M}$ ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.
- ☐ $\mathcal{M}$ ist weder linear unabhängig, noch ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

g) Sei $\mathcal{V} = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A = A^T\}$ der Vektorraum der symmetrischen (2×2)-Matrizen. Welche der folgenden Mengen ist eine Basis von $\mathcal{V}$?

- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

h) Seien $n \neq m$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n,m}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist definiert?

- ☐ $AB + I_n$
- ☐ $(AB)^T + I_n$
- ☐ $AB^T + I_n$
- ☐ $A^TB + I_n$

i) Sei A eine invertierbare Matrix und $c \in \mathbb{R}$. Welche Aussage gilt im Allgemeinen nicht?

- ☐ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- ☐ $(cA)^{-1} = cA^{-1}$.
- ☐ $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^{-1})$.
- ☐ $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

j) Seien $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, sodass $A\vec{x} = \vec{b}$ unendlich viele Lösungen besitzt. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ $\mathrm{Rang}(A) < \mathrm{Rang}([A \mid \vec{b}])$
- ☐ $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}([A \mid \vec{b}]) = m$
- ☐ $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}([A \mid \vec{b}]) < m$
- ☐ $\mathrm{Rang}(A) > \mathrm{Rang}([A \mid \vec{b}])$

k) Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben mit $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Was trifft dann zu?

- ☐ $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 0$
- ☐ $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 2$
- ☐ $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 1$
- ☐ $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 3$

l) Sei $f \colon [4, 7[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und monoton wachsend mit $f(5) > 7$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☐ f besitzt ein globales Maximum.
- ☐ f ist nach unten beschränkt.
- ☐ f ist nach oben beschränkt.
- ☐ Es gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in [4, 7[$.

m) Sei $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f\left(\frac{1}{2}\right) > 2$ und $f\left(-\frac{1}{2}\right) < -1$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☐ f besitzt ein globales Minimum.
- ☐ f hat im Intervall $[-1,1]$ eine Nullstelle.
- ☐ f ist monoton wachsend.
- ☐ Keine der obigen Aussagen ist im Allgemeinen wahr.

n) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Seien weiter T_n das n-te Taylorpolynom von f und R_n das n-te Restglied im Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?

- ☐ R_n ist ein Polynom vom Grad $n+1$.
- ☐ R_n hat n verschiedene Nullstellen.
- ☐ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.
- ☐ $\deg(T_n) = n$.

o) Das Fourierpolynom n-ter Ordnung der stetigen π-periodischen Funktion f sei gegeben durch

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2kt)}{1-4k^2}.$$

Dann gilt:

- ☐ φ_n ist $\frac{\pi}{2}$-periodisch.
- ☐ φ_n ist nicht periodisch.
- ☐ f ist gerade.
- ☐ f ist ungerade.

p) Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit charakteristischem Polynom $p_A(t) = (1-t)^2(-3-t)$. Dann ist die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$

- ☐ injektiv und surjektiv.
- ☐ injektiv, aber nicht surjektiv.
- ☐ nicht injektiv, aber surjektiv.
- ☐ weder injektiv noch surjektiv.

q) Welche Menge bildet eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bzgl. des Standardskalarproduktes?

- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

r) Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ und mit geometrischen Vielfachheiten $g(0) = 2$ und $g(2) = 1$. Dann ist A

- ☐ invertierbar und diagonalisierbar.
- ☐ invertierbar, aber nicht diagonalisierbar.
- ☐ nicht invertierbar, aber diagonalisierbar.
- ☐ weder invertierbar noch diagonalisierbar.

s) Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit charakteristischem Polynom $p_A(t) = -t^3 - 7t^2 - 15t - 9$. Welcher Wert ist ein Eigenwert von A?

☐ 1 ☐ 0 ☐ -1 ☐ -2

t) Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine unitäre Matrix. Welche der folgenden Aussagen gilt dann **nicht**?

☐ $\det(A) = e^{i\varphi}$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ ☐ $A^T = A^{-1}$

☐ $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$ ☐ $\operatorname{rang}(A) = n$

2. Aufgabe (Komplexe Zahlen) (5 Punkte)

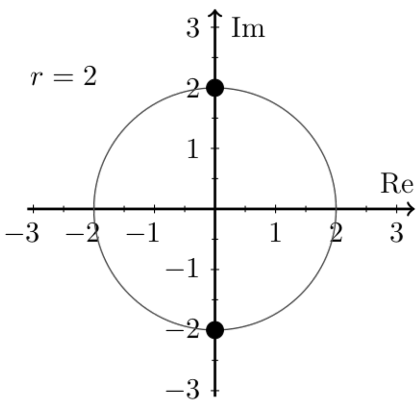
a) (3 Punkte) Es seien komplexe Zahlen z_1, z_2 gegeben, über die Folgendes bekannt ist

$$\mathrm{Re}(z_1) = 1, \qquad |z_1| = \sqrt{10}, \qquad \mathrm{Im}(z_2) = 6, \qquad \mathrm{Re}(z_1 + z_2) = 4.$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

$\lvert\mathrm{Im}(z_1)\rvert =$	$\lvert z_2\rvert =$	$\mathrm{Re}(z_1 + iz_2) =$

b) (2 Punkte) Geben Sie die eindeutigen Parameter $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{Z}$ an, sodass die Gleichung $z^a = b$ die in der Abbildung markierte Lösungsmenge besitzt.



$a =$	$b =$

3. Aufgabe (Polynome und Rationale Funktionen) (5 Punkte)

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationale Funktion r,

$$r(x) = \frac{x+10}{x^2+2x-8}.$$

$r(x) = \underline{\qquad\qquad} + \underline{\qquad\qquad}$

b) (2 Punkte) Gegeben seien die Polynome

$$p(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 12x - 3 \quad \text{und} \quad q(x) = x^2 + 4x - 1.$$

Bestimmen Sie den Grad des Polynoms $p \cdot q$ und berechnen Sie das Polynom $s = \frac{p}{q}$ (Polynomdivision).

$\deg(p \cdot q) =$ $s(x) =$

4. Aufgabe (Zahlenfolgen und Konvergenz) (6 Punkte)

a) (3 Punkte) Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, welche durch

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\log(n+1))^2}{n}, \\ b_n &= \frac{3n^7 + 3n^5 - n^3 + 9}{7n^3(n+3)^4}, \\ c_n &= e^{\frac{1}{n}}(\sin(n) - \sin(-n)), \end{aligned}$$

gegeben sind, auf Konvergenz.

Geben Sie jeweils den Grenzwert an, falls die Folge konvergiert und schreiben Sie „existiert nicht“, falls der Grenzwert nicht existiert.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$

b) (2 Punkte) Gegeben sei die konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche rekursiv definiert ist durch

$$a_0 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{7a_n - 5}{8}.$$

Bestimmen Sie das Folgenglied a_2 und den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$a_2 =$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

c) (1 Punkt) Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\frac{n\sqrt{e^{1+\frac{1}{n}}}}{n+1} \leq a_n \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Geben Sie den Grenzwert an, falls jede solche Folge konvergiert und schreiben Sie „existiert nicht“, falls der Grenzwert im Allgemeinen nicht existiert.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

5. Aufgabe (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) (9 Punkte)

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a(x+1)}{\sqrt{-x}}, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 3 - \sqrt{bx}, & 1 \leq x, \end{cases}$$

stetig ist.

$a =$	$b =$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie den maximalen Bereich $D \subseteq \mathbb{R}$, auf dem die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \ln(x^4 + 2x^2 + 3)$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$.

$D =$	$f'(x) =$

c) (3 Punkte) Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit dem Taylorpolynom

$$T_2(x) = -3(x-1) + 2(x-1)^2$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Bestimmen Sie $f(1)$, $f'(1)$ und $f''(1)$.

$f(1) =$	$f'(1) =$	$f''(1) =$

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mit der Regel von Bernoulli/de l'Hospital.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos(x)} =$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1 - x}{e^{-x}} =$

6. Aufgabe (Integration) (11 Punkte)

a) (3 Punkte)
Um das unbestimmte Integral $\int x^3 \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$ zu berechnen, formen wir es mittels partieller Integration um und erhalten

$$\int x^3 \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = a \cdot x^b \cdot e^{-x} - c \int x^2 \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a, b und c.

$a =$	$b =$	$c =$

b) (3 Punkte) Um das Integral $\int_0^1 e^{2x-1}\,\mathrm{d}x$ zu berechnen, nutzen wir die Substitutionsregel mit $t = 2x - 1$ und erhalten

$$\int_0^1 e^{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int_a^b c \cdot e^t\,\mathrm{d}t$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a, b und c.

$a =$	$b =$	$c =$

c) (2 Punkte) Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{und} \quad f(3) = 2.$$

Bestimmen Sie folgende Integrale.

$\int_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x =$	$\int_0^3 x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x =$

d) (3 Punkte) Entscheiden Sie jeweils, ob die beiden folgenden uneigentlichen Integrale existieren. Falls das uneigentliche Integral existiert, geben Sie seinen Wert an; andernfalls schreiben Sie „existiert nicht“.

$\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x$	$\int_{-\infty}^0 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$	$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

7. Aufgabe (Matrizen, Vektorräume und Lineare Abbildungen) (11 Punkte)

a) (2 Punkte) Gegeben sei $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2ia + b \\ 3ic \end{bmatrix}$. Finden Sie eine Matrix A, sodass $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ für alle $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$ gilt und bestimmen Sie Kern(f).

$A =$ $\qquad$ $\mathrm{Kern}(f) = \left\{ \qquad \middle| \, t \in \mathbb{C} \right\}$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform (NZSF), sowie den Rang und die Dimension des Kerns von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}.$$

$\mathrm{NZSF}(A) =$ $\qquad$ $\mathrm{Rang}(A) =$ $\qquad$ $\dim(\mathrm{Kern}(A)) =$

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}_K$ des Kerns und eine Basis $\mathcal{B}_B$ des Bildes von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Lösungsmenge $\mathbb{L}(A, b)$ von $Ax = b$ für $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\mathcal{B}_K = \left\{ \qquad \right\}$ $\qquad$ $\mathcal{B}_B = \left\{ \qquad \right\}$

$\mathbb{L}(A, b) = \left\{ \qquad \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$

d) (2 Punkte) Seien $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, und $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit

$$f(a) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad f(b) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stellen Sie $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ als Linearkombination von a und b dar und bestimmen Sie $f(c)$.

c =	$f(c) =$

e) (1 Punkt) Gegeben sei die folgende Basis des $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie den Vektor $a \in \mathbb{R}^4$, welcher bzgl. $\mathcal{B}$ den Koordinatenvektor

$$K_{\mathcal{B}}(a) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

hat.

$a =$

8. Aufgabe (Determinante, Eigenwerte und Skalarprodukte) (13 Punkte)

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Determinanten von

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\det(A) =$	$\det(B) =$

b) (2 Punkte) Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{5,5}$ mit $\det(A) = 4, \det(B) = 8$ und $\det(C) = 3$. Bestimmen Sie $\det(A^T B^{-1})$ und $\det(-C)$.

$\det(A^T B^{-1}) =$	$\det(-C) =$

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_A von $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

$p_A(z) =$

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda = 4$ von

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

$a(4) =$	$g(4) =$

e) (2 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ die Matrix mit

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3,3}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3,3}$, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt.

$D =$	$S =$

f) (2 Punkte) Wir betrachten das folgende Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 4x_1y_1 + 2x_2y_2.$$

Bestimmen Sie $z_1 \in \mathbb{R}$, sodass $\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ orthogonal zu $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ist.

$z_1 =$

Bestimmen Sie $\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|$ für die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm.

$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| =$

Hinweis: Die induzierte Norm ist definiert als $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

g) (2 Punkte) Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\| \cdot \|$ und seien $u, v \in V$ orthonormal. Bestimmen Sie $\langle 2u + v, 3v \rangle$ und $\|2u + v\|^2$.

$\langle 2u + v, 3v \rangle =$ $\|2u + v\|^2 =$