TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 01
Fakultät II - Mathematik
Lutz/Herrmann

Lösungen zur Klausur vom 8.10.2001 (Rechenteil)

Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

a) Berechnen Sie für

$$z_1 = \frac{(1+i)^2}{1-i}, \qquad z_2 = 1-3i$$

die komplexen Zahlen $z_1 \cdot z_2$, $|z_2|$, $e^{z_1^2 - iz_2}$ in der Form $x+iy$ mit reellen x, y.

Mit

$$z_1 = \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{(1+i)^3}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+3i-3-i}{2} = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (-1+i)(1-3i) = -1+3i+i+3 = 2+4i, \\
|z_2| &= |1-3i| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}, \\
e^{z_1^2 - iz_2} &= e^{(-1+i)^2 - i(1-3i)} = e^{-2i-i-3} = e^{-3-3i} = e^{-3} \cdot e^{-3i} \\
&= \frac{1}{e^3}(\cos(-3) + i\sin(-3)) = \frac{\cos 3}{e^3} - i\,\frac{\sin 3}{e^3}.
\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ der Ungleichung $|x-4| \geq 2|x+1|$

Fallunterscheidung:

I) $x \geq 4$: $\quad x - 4 \geq 2(x+1)$
$\Leftrightarrow \quad -6 \geq x \qquad \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$

II) $-1 \leq x < 4$: $\quad -(x-4) \geq 2(x+1)$
$\Leftrightarrow \quad 2 \geq 3x$
$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} \geq x \qquad \Rightarrow \mathbb{L}_2 = [-1, \frac{2}{3}]$

III) $x < -1$: $\quad -(x-4) \geq -2(x+1)$
$\Leftrightarrow \quad x \geq -6 \qquad \Rightarrow \mathbb{L}_3 = [-6, -1[$

$\Longrightarrow \qquad \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = [-6, \frac{2}{3}]$

2. Aufgabe (7 Punkte)

a) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(\cos x)\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{d}{dx}\exp(\cos x)\,dx$$
$$= [-\exp(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1$$

b) $$\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = [\sin x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$$
$$= 0 + \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

c) Polynomdivision liefert:

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x}{x^2 + 5x + 6} = x - 1 + \frac{6}{x^2 + 5x + 6},$$

somit:

$$\int_0^2 \frac{x^3 + 4x^2 + x}{x^2 + 5x + 6}\,dx = \int_0^2 (x - 1)\,dx + 6\int_0^2 \frac{1}{(x+2)(x+3)}\,dx$$

$$= [\frac{1}{2}x^2 - x]_0^2 + 6\int_0^2 \left(\frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x+3)}\right)dx$$

$$= 2 - 2 + 6[\ln\frac{x+2}{x+3}]_0^2 = 6(\ln\frac{4}{5} - \ln\frac{2}{3}) = 6\ln\frac{6}{5}$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Für die Ableitungen von f erhält man

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2 + e^{-x}\sin x, & f(0) &= 2,\\
f'(x) &= e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = e^{-x}(\cos x - \sin x), & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= -e^{-x}(\cos x - \sin x) - e^{-x}(\cos x + \sin x) & &\\
&= -2e^{-x}\cos x, & f''(0) &= -2,
\end{aligned}$$

Also ist das Taylorpolynom $T_2(x) = 2 + x - x^2$.

b) Das Restglied hat die Form $f(x) - T_2(x) = R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$, wobei ξ zwischen $x_0 = 0$ und x liegt. Für $x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ folgt also $\xi \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ und es ist

$$f'''(x) = 2e^{-x}(\cos x + \sin x).$$

Nun schätzen wir ab und erhalten

$$|R_2(x)| \le \frac{1}{6}\,|2e^{\xi}| \cdot (1+1) \cdot |x|^3 \le \frac{2}{3}\,e^{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{10}\right)^3 \le \frac{1}{500}$$

für alle $x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie für alle $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = n^3.$$

Induktionsanfang für $n = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} (3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1) \;=\; 1 \;=\; 1^3.$

Induktionsschritt $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (3k^2 - 3k + 1) &= (3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1) + \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) \\
&\overset{\text{IV}}{=} (3(n^2 + 2n + 1) - 3(n+1) + 1) + n^3 \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&= (n+1)^3.
\end{aligned}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 01

Fakultät II - Mathematik

Lutz/Herrmann

Lösungen zur Klausur vom 8.10.2001 (Verständnisteil)

Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

a) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f als Quotient stetiger Funktionen, deren Nenner nie Null wird, stetig.

Indem man zweimal die Regel von de l'Hospital anwendet, erhält man

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Wegen $f(0) = 1$ ist damit f auch in Null stetig.

b) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f als Quotient differenzierbarer Funktionen, deren Nenner nie Null wird, differenzierbar.

Indem man dreimal die Regel von de l'Hospital an wendet, erhält man

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2-2\cos x}{x^2} - 1}{x - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos x - x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - 2x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x}{6} = 0,$$

also ist f auch an der Stelle 0 differenzierbar.

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) falsch,
Gegenbeispiel: $a_n = 5 + (-1)^n \ln(n+1)$,
denn $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht.

b) falsch,
Gegenbeispiel: $x \to |x|$,
denn an der Stelle $x = 0$ ist die Betragsfunktion nicht differenzierbar.

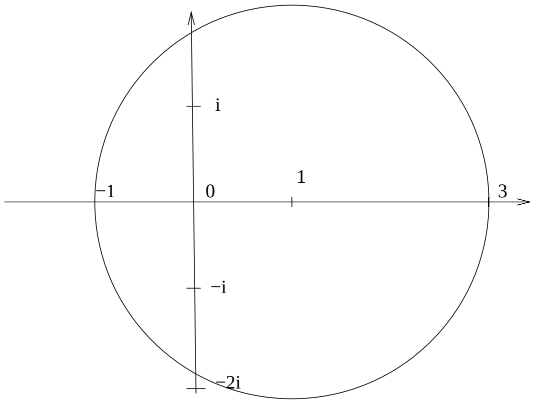
c) falsch,
Gegenbeispiel: $f : [0,7[\to \mathbb{R},\ f(x) = x$
denn kleinste obere Schranke ist 7, aber $f(x) < 7$ für alle $x \in [0,7[$

d) falsch,
Gegenbeispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, harmonische Reihe!

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Falls der Grenzwert existiert, ist er gleich dem Konvergenzradius, also $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 2.$

b) Alle Punkte innerhalb des Kreises (ohne Rand!)



c) Jede reelle Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzintervalles differenzierbar. Da $]0,2[$ im Konvergenzbereich liegt, ist also f differenzierbar.
Die Taylorreihe von f' an der Stelle 1 ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-1)^k$.

4. Aufgabe (3 Punkte)

$$\frac{d}{dx}x^{\cos x} = \frac{d}{dx}e^{\cos x \ln x} = e^{\cos x \ln x}\frac{d}{dx}(\cos x \ln x) = x^{\cos x}(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x})$$

1. Definition von a^b
2. Kettenregel
3. Produktregel