P

Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
Penn-Karras, Bärwolff, Förster, Tröltzsch

WS 01/02
18. Februar 2002

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

6 Punkte

Begründen Sie, dass die Funktion $f(x) = 1+\sqrt{x}-x^2$ im Intervall $[0, 4]$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Wir berechnen die Funktionswerte an den Intervallgrenzen und erhalten $f(0) = 1 + 0 - 0 = 1 > 0$ bzw. $f(4) = 1 + 2 - 16 = -13 < 0$. Die Funktion f ist als Summe stetiger Funktionen wieder stetig im Intervall $[0, 4]$. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt f jeden Wert zwischen 1 und -13 an also speziell den Wert 0.

2. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei ein Polynom fünften Grades $P(z)$ mit reellen Koeffizienten.
a) Das Polynom habe Nullstellen bei $2+i$, $4-3i$ und 5. Geben Sie alle Nullstellen des Polynoms an und stellen Sie $P(z)$ mit komplexen Linearfaktoren dar.
Komplexe Nullstellen treten immer paarweise auf. Wir müssen also nur die konjugiert komplexen Zahlen zu $2 + i$ und $4 - 3i$ bestimmen und erhalten die zwei weiteren Nullstellen $2 - i$ und $4 + 3i$. Damit können wir das Polynom darstellen in der Form $P(z) = (z - 5)(z - (2 + i))(z - (2 - i))(z - (4 - 3i))(z - (4 + 3i))$ (wenn man den Faktor vor der höchsten Potenz auf 1 normiert).
b) Welche Konstellationen für Nullstellen (Anzahl reeller bzw. komplexer Nullstellen) sind für ein Polynom fünften Grades mit reellen Koeffizienten möglich?
Da komplexe Nullstellen immer paarweise auftreten, gibt es die Möglichkeiten 5 reelle und 0 komplexe, 3 reelle und 2 komplexe, 1 reelle und 4 komplexe.

3. Aufgabe

6 Punkte

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch ? Begründen Sie Ihre Aussage.
a) Jede konvergente Folge ist monoton wachsend oder monoton fallend.
Falsch, die Folge $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0 ist aber nicht monoton.
b) Für alle $n \geq 1$ gelte: $|a_n| < 1$. Dann konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} + \left(\frac{1}{7}\right)^n \right)$.
Wahr, die Reihe konvergiert als Summe konvergenter Reihen: Wegen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert die erste Reihe nach dem Majorantenkriterium. Die zweite Reihe ist wegen $\left|\frac{1}{7}\right| < 1$ eine konvergente geometrische Reihe.
c) Jede beschränkte Folge ist konvergent.
Falsch, die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber nicht konvergent.

4. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : [-1, \infty[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \in [-1, 0] \\ -\dfrac{1}{x+1} & \text{falls} \quad x > 0. \end{cases}$$

Besitzt diese Funktion globale Extremalstellen? Begründen Sie Ihre Aussage.
Die Funktion ist im Punkt 0 unstetig. Auf beiden Teilintervallen ist die Funktion streng monoton wachsend. Deshalb müssen wir nur das Randverhalten und das Verhalten an der Unstetigkeitsstelle untersuchen. Wir erhalten $f(-1) = -1$ und $f(0) = 0$. Diese beiden Punkte sind Kandidaten für eine globale Extremalstelle. Wegen $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = -1$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ sind sie es auch. Das Ergebnis lautet also: Die Funktion f besitzt ein globales Maximum für $x = 0$ und ein globales Minimum für $x = -1$.

5. Aufgabe

8 Punkte

Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-8)^n$ sei konvergent für $x = 5$ und divergent für $x = 11$.

a) Was kann man über den Konvergenzradius aussagen?
Aus der Konvergenz für $x = 5$ folgern wir $R \geq |5-8| = 3$. Andererseits folgt aus der Divergenz für $x = 11$ die Beziehung $R \leq |11-8| = 3$. Folglich gilt $R = 3$.

b) Welchen Wert besitzt der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, falls er exististiert?

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R = 3$$

c) Konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-8)^n$ in den Punkten $x = 3$ bzw. $x = 7$?
Die Reihe divergiert für $x = 3$, wegen $|3-8| = 5 > R$ und konvergiert für $x = 7$, wegen $|7-8| = 1 < R$.

6. Aufgabe

8 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = 1 - \frac{1}{2n+1}$.

Induktionsanfang: $\sum\limits_{k=1}^{1} \frac{2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $n \geq 1$ mit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = 1 - \frac{1}{2n+1}.$$

Induktionsbehauptung: Dann folgt $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = 1 - \frac{1}{2n+3}$.

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \frac{2}{(2n+1)\cdot(2n+3)}$$

$$\stackrel{\text{IV}}{=} 1 - \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = 1 - \frac{2n+3-2}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = 1 - \frac{1}{2n+3}$$