Ü

Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
Penn-Karras, Bärwolff, Förster, Tröltzsch

WS 01/02
18. Februar 2002

Februar – Klausur (Rechenteil)
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Ich **wünsche** den Aushang des Klausurgebnisses unter Angabe meiner Matr.–Nr. (ohne Namen) am Schwarzen Brett und im WWW.

....
Unterschrift

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die Integrale a) $\int x^2 e^x \, dx$,
Wir integrieren zweimal partiell.

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + \int e^x \, dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

b) $\int_0^1 2xe^{(x^2)} \, dx$.
Hier führt eine Substitution zum Ziel

$$\int_0^1 2xe^{(x^2)} \, dx = \int_0^1 e^t \, dt = e - 1.$$

2. Aufgabe

6 Punkte

Stellen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ in Form einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ dar. Für welche x ist diese Potenzreihe konvergent?
Wir benutzen die Formel für die geometrische Reihe und erhalten

$$f(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$$

Diese ist konvergent für $|q| < 1$ also für $|\frac{x}{2}| < 1$ oder $|x| < 2$ bzw. $x \in]-2, 2[$.

3. Aufgabe

4 Punkte

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos(x)}{x}$.
Wir benutzen die Regel von l' Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \sin(x)}{1} = 1.$$

4. Aufgabe

6 Punkte

Berechnen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 + \sqrt{n^2 + 3}}{(2n + 5)^2}$.
Wir klammern die höchste Potenz von n in Zähler und Nenner aus und berechnen so den Grenzwert.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2(1 + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4}})}{n^2(2 + \frac{5}{n})^2} = \frac{1}{4}$$

5. Aufgabe

8 Punkte

Untersuchen Sie die beiden folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$,

Wir benutzen das Vergleichskriteriums (Minorantenkriterium): Wegen $\frac{n+1}{n^2} > \frac{1}{n}$ und der Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ auch.

Es ist auch folgende Argumentation möglich. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ ist die Summe der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und der divergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ und divergiert daher (konvergent + divergent = divergent).

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2+5}$.

Hier wenden wir das Leibnizkriteriums an.

Der Ausdurck $(-1)^n \frac{2}{n^2+5}$ alterniert. Außerdem ist $\frac{2}{n^2+5}$ eine monotone Nullfolge. Somit konvergiert die Reihe nach Leibniz.

6. Aufgabe

6 Punkte

Berechnen Sie z^6 für $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3+2i}{4-6i}$ und stellen Sie diese in der Form $x + iy$ dar.

Zunächst berechnen wir den Bruch:

$$\frac{3+2i}{4-6i} = \frac{(3+2i)(4+6i)}{(4-6i)(4+6i)} = \frac{0+26i}{52} = \frac{1}{2}i.$$

Jetzt wandeln wir den gesamten Ausdruck in Polarkoordinaten um.

$z = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})$. Nach Anwendung der Formel von Moivre erhalten wir $z^6 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$, was umgewandelt $z^6 = -1$ bedeutet.