Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 01/02
Penn-Karras, Bärwolff, Förster, Tröltzsch 8. April 2002

April – Klausur (Verständnisteil)
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

6 Punkte

Begründen Sie, dass die Funktion $f(x) = |x-1| + 3x - x^2$ im Intervall $[0,4]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.
Wir berechnen die Funktionswerte an den Intervallgrenzen und erhalten $f(0) = 1+0-0 = 1 > 0$ bzw.$f(4) = 3+12-16 = -1 < 0$. Die Funktion f ist als Summe stetiger Funktionen wieder stetig im Intervall $[0,4]$. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt f jeden Wert zwischen -1 und 1 an also speziell den Wert 0.

2. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben sei ein Polynom sechsten Grades $P(z)$ mit reellen Koeffizienten.
a) Das Polynom habe Nullstellen bei $2-i$, $1+3i$ und $5-2i$. Geben Sie alle Nullstellen des Polynoms an und stellen Sie $P(z)$ mit komplexen Linearfaktoren dar.
Komplexe Nullstellen treten immer paarweise auf. Wir müssen also nur die konjugiert komplexen Zahlen zu $2-i$, $1+3i$ und $5-2i$ bestimmen und erhalten die weiteren Nullstellen $2+i$, $1-3i$ und $5+2i$. Damit können wir das Polynom darstellen in der Form $P(z) = (z-(2-i))(z-(2+i))(z-(1+3i))(z-(1-3i))(z-(5-2i))(z-(5+2i))$ (wenn man den Faktor vor der höchsten Potenz auf 1 normiert).
b) Welche Konstellationen für Nullstellen (Anzahl reeller bzw. komplexer Nullstellen) sind für ein Polynom sechsten Grades mit reellen Koeffizienten möglich?
Da komplexe Nullstellen immer paarweise auftreten, gibt es die Möglichkeiten 6 reelle und 0 komplexe, 4 reelle und 2 komplexe, 2 reelle und 4 komplexe, 0 reelle und 6 komplexe.

3. Aufgabe

6 Punkte

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch ? Begründen Sie Ihre Aussage.
a) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.
Falsch, die Folge $(-1)^n$ ist divergent aber beschränkt.
b) Die Funktion $\cos(\sin(x)) + \sqrt{|x|}$ besitzt im Intervall $[-1,1]$ ein Minimum.
Richtig, da eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ihr Minimum annimmt.
c) Für die im Intervall $[0,2]$ differenzierbare Funktion f gelte $f(0) = 3$ und $f(2) = 5$. Dann gibt es einen Punkt $x \in [0,2]$ mit $f'(x) = 1$.
Richtig, das besagt der Mittelwertsatz: Es gibt ein $\xi \in]0,2[$ (also auch in $[0,2]$) mit $f'(\xi) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{5-3}{2-0} = 1$.

4. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : [-2,\infty[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{falls} \quad x \in [-2,2] \\ 5 & \text{falls} \quad x > 2. \end{cases}$$

Besitzt diese Funktion globale Extremalstellen? Begründen Sie Ihre Aussage.
Die Betragsfunktion ist nach Definition immer größer oder gleich Null. Auf dem

anderen Teilintervall ist der Funktionswert auch größer als Null. Somit besitzt die Funktion ein globales Minimum bei $x = 0$, da dort (und nur dort) der Wert Null angenommen wird. Die Betragsfunktion wächst für positive x und fällt für negative. Sie kann daher nur ein Maximum am Rand annehmen. Es gilt $f(-2) = f(2) = 2 < 5$. Deshalb sind alle Punkte mit $x > 2$ globale Maxima, da dort der Wert 5 angenommen wird.

5. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-6)^n$.

a) Was kann man über den Konvergenzradius aussagen, wenn die Reihe für $x = 2$ konvergiert ?

Aus der Konvergenz für $x = 2$ folgt $R \geq |2 - 6| = 4$.

b) Was kann man über den Konvergenzradius aussagen, wenn die Reihe für $x = 12$ divergiert ?

Aus der Divergenz für $x = 12$ folgt $R \leq |12 - 6| = 6$.

c) Welche Aussagen kann man unter diesen Voraussetzungen über die Konvergenz in den Punkten -3, 1, 9 machen ?

Wir erhalten Divergenz bei $x = -3$ wegen $|-3-6| = 9 > R$ und Konvergenz bei $x = 9$ wegen $|9 - 6| = 3 < R$. Für $x = 1$ ist wegen $|1 - 6| = 5$ und $4 < 5 < 6$ keine Aussage möglich.

6. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben ist die rekursive Folge $a_0 = 3$, $a_{n+1} = \frac{a_n+7}{2}$ Zeigen Sie mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $a_n = 7 - \dfrac{4}{2^n}$.

Induktionsanfang: $a_0 = 3 = 7 - \dfrac{4}{1}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein n mit $a_n = 7 - \dfrac{4}{2^n}$.

Induktionsbehauptung: Dann folgt $a_{n+1} = 7 - \dfrac{4}{2^{n+1}}$.

Induktionsschritt:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 7}{2} \overset{\text{IV}}{=} \frac{7 - \frac{4}{2^n} + 7}{2} = 7 - \frac{4}{2^{n+1}}$$