TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 02
Fakultät II - Mathematik Stand: 6. August 2002
Lutz, Gündel vom Hofe
Körner, Leschke

Lösungen zur Klausur vom 22.7.2002 (Rechenteil)
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

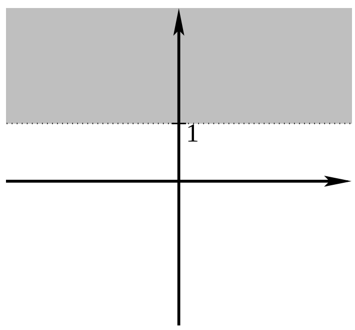
Welche $z \in \mathbb{C}$ erfüllen die folgende Ungleichung? Skizzieren Sie die Lösungsmenge!

$$\left|\frac{2iz+4}{(1+i)z}\right|^2 \leq 2$$

1. Lösungsweg:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2iz+4}{(1+i)z}\right|^2 &\overset{\text{mit } z=x+iy}{=} \left|\frac{2i(x+iy)+4}{(1+i)(x+iy)}\right|^2 = \left|\frac{-2y+4+2ix}{(x-y)+i(x+y)}\right|^2 \\
&= \frac{(-2y+4)^2+(2x)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2} = \frac{4y^2-16y+16+4x^2}{2x^2+2y^2} \leq 2 \\
&\Leftrightarrow -16y+16 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 1.
\end{aligned}$$

Skizze:



2. Lösungsweg:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2iz+4}{(1+i)z}\right|^2 &= \frac{(2iz+4)(-2i\bar{z}+4)}{(1+i)z(1-i)\bar{z}} = \frac{4|z|^2+8i(z-\bar{z})+16}{2|z|^2} \\
&= \frac{4|z|^2-16\,\mathrm{Im}\,z+16}{2|z|^2} \leq 2 \\
&\Leftrightarrow -16\,\mathrm{Im}\,z+16 \leq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,z \geq 1.
\end{aligned}$$

2. Aufgabe (8 Punkte)

i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2}{3k+4}$ konvergiert nach dem Leibnitzkriterium:

die Reihe ist alternierend, und $\frac{2}{3k+4}$ ist eine

monoton fallende
Nullfolge.

ii) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium :

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^3+1}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{(n+1)^3+1}{n^3+1}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

i)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 3\underbrace{(x^2+1)}_{u'}\underbrace{\ln x}_{v}\,dx &= \left[(x^3+3x)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 (x^3+3x)\,\frac{1}{x}\,dx \\
&= \left[(x^3+3x)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 (x^2+3)\,dx \\
&= 14\ln 2 - \left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_1^2 = 14\ln 2 - \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

ii) **1. Lösung**

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (3+x\sin x^2)\,dx &= \int_0^4 \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{t}}+\sin t\right)dt \\
&\quad \text{Subtitution } t=x^2,\ dt=2x\,dx, x=\sqrt{t} \quad , \\
&\quad \text{Grenzen: } 0-4 \\
&= \left[3\sqrt{t}-\frac{1}{2}\cos t\right]_0^4 \\
&= 6+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4 = \frac{13}{2}-\frac{1}{2}\cos 4
\end{aligned}$$

2. Lösung

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (3 + x\sin x^2)\,dx &= \int_0^2 3dx + \int_0^2 x\sin x^2\,dx \\
&= \left[3x\right]_0^2 + \int_0^4 \frac{1}{2}\sin t\,dt \\
&\qquad \text{Subtitution } t = x^2,\ dt = 2x\,dx, \\
&\qquad \text{Grenzen:}\quad 0-4 \\
&= 6 - \left[\frac{1}{2}\cos t\right]_0^4 \\
&= 6 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4 = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}\cos 4
\end{aligned}$$

4. Aufgabe (7 Punkte)

Die Differentialgleichung ist $y'(x) = x\tan(y(x)),\ y(1) = \frac{\pi}{4}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Lösung $y(x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
Die zweite Ableitung von y erfüllt die Differentialgleichung:

$$y''(x) = \tan(y(x)) + x(1 + \tan^2(y(x)))y'(x),$$

oder

$$y''(x) = \tan(y(x)) + x\frac{y'(x)}{\cos^2(y(x))},$$

damit

$$y(1) = \frac{\pi}{4},\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 1 + 2(1 + 1^2)1 = 3,$$

(falls $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ bzw $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ fehlt, dann hier)

und

$$T^2_{y,1}(x) = \frac{\pi}{4} + x - 1 + \frac{3(x-1)}{2}.$$

(falls in der Formel der Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ fehlt, gibt es hier nur noch)

5. Aufgabe (8 Punkte)

Grenzwerte:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^7+6n+3}{3n^7+17n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+\frac{6}{n^6}+\frac{3}{n^7}}{3+\frac{17}{n^5}+\frac{1}{n^7}} = \frac{5}{3}.$

ii) Da $\lim_{x\to 0}\ 1-\cos(\frac{x}{2}) = \lim_{x\to 0}\ 1-\cos x = 0$ und $\lim_{x\to 0}\ \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2}) = \lim_{x\to 0}\ \sin x = 0$ erhält man

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\frac{x}{2})}{1-\cos x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})}{\sin x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})}{\cos x} = \frac{1}{4}.$$

(wird L'Hospital nicht erwähnt: ; wird "$\frac{0}{0}$" nicht erwähnt:)