TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 02
Fakultät II - Mathematik Stand: 6. August 2002
Lutz, Gündel vom Hofe
Körner, Leschke

Lösungen zur Klausur vom 22.7.2002 (Verständnisteil) Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die n-te Ableitung der Funktion xe^x gilt:

$$(xe^x)^{(n)} = (x+n)e^x \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lösung:
Induktionsanfang ($n = 0$): $(xe^x)^{(0)} = xe^x = (x+0)e^x$.
Induktionsschritt: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$(xe^x)^{(n)} = (x+n)e^x \text{ (Induktionsvoraussetzung)} .$$

(die Induktionsvoraussetzung sollte irgendwo erwähnt werden!)
Dann folgt

$$(xe^x)^{(n+1)} \underset{\text{IV}}{=} ((x+n)e^x)' = e^x + (x+n)e^x = (x+n+1)e^x,$$

was zu zeigen war.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Bestimmen Sie die Parameter a, $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f differenzierbar wird.

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax+1} & \text{falls } x \leq -1 \\ e^{x^2+b} & \text{falls } x > -1 \end{cases}$$

1. Lösung:
Die Funktion f ist offensichtlich für $x \neq -1$ stetig und differenzierbar.
Der rechts– und linksseitige Grenzwert berechnen sich zu:

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} e^{x^2+b} = e^{1+b},$$

und

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1+} e^{ax+1} = e^{-a+1},$$

Da f stetig sein soll, ergibt sich

$$e^{1+b} = e^{-a+1} = f(-1).$$

Der rechts– und linksseitige Grenzwert des Differenzenquotients ergibt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} &= \lim_{x\to -1+} \frac{e^{x^2+b}-e^{-a+1}}{x+1} = \lim_{x\to -1+} \frac{e^{x^2+b}-e^{1+b}}{x+1} \\ &\overset{\frac{0}{0},\text{L'H}}{=} \lim_{x\to -1+} \frac{2xe^{x^2+b}}{1} = -2e^{1+b}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} &= \lim_{x\to -1-} \frac{e^{xa+1}-e^{-a+1}}{x+1} \\ &\overset{\frac{0}{0},\text{L'H}}{=} \lim_{x\to -1+} \frac{ae^{ax+1}}{1} = ae^{-a+1}\end{aligned}$$

Die Ableitung muss an der Stelle $x = -1$ existieren, wir erhalten also

$$ae^{-a+1} = -2e^{1+b}.$$

Beide Gleichungen für a und b zusammen ergeben

$$a = -2, b = 2.$$

(Bemerkung: hier L'Hospital und seine Voraussetzungen eher großzügig behandeln $\Longrightarrow$ kein Punktabzug, wenn "$\frac{0}{0}$" oder der Kommentar "L'H" fehlt)

" 2. Lösung"
Bepunktung der Stetigkeit wie in der ersten Lösung.
Wir haben für $x \neq -1$

$$f'(x) = \begin{cases} ae^{ax+1} & \text{falls } x \leq -1 \\ 2xe^{x^2+b} & \text{falls } x > -1 \end{cases}$$

Damit $\lim_{x\to -1+} 2xe^{x^2+b} = -2e^{1+b}$ und $\lim_{x\to -1+} ae^{ax+1} = ae^{-a+1}$.
Man erhält wieder die obigen Gleichung

$$ae^{-a+1} = -2e^{1+b}.$$

Beide Gleichungen für a und b zusammen ergeben

$$a = -2, b = 2.$$

(Man erhält hierfür keine volle Punktzahl: Dieser Lösungsweg ist **falsch**! Dieser Weg führt zum Begriff der "Stetigen Differenzierbarkeit", allerdings muss man dann noch zeigen, dass $\lim_{x\to -1+} f'(x) = \lim_{x\to -1+} f'(x) = f'(-1)$ ist, also müsste man auch hier noch den Grenzwert des Differenzenquotienten berechnen).

3. Aufgabe (7 Punkte)

Über die komplexe Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-1)^k$ ist bekannt, dass sie für $z = 3$ konvergiert und für $z = 5$ divergiert. Ferner existiert $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ weiss man sicher, dass die Potenzreihe konvergiert?

b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ weiss man sicher, dass die Potenzreihe divergiert?

c) Wie groß ist $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ mindestens?

d) Wie groß ist $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ höchstens?

Lösung: Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ hat den Konvergenzradius

$$R := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \quad q, \text{ da dieser Grenzwert existiert.}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$ ist die Reihe konvergent, für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$ ist die Reihe divergent.
Der Entwicklungspunkt dieser Reihe ist $z_0 = 1$. Da die Reihe für $z = 3$ konvergiert und für $z = 5$ divergiert muss $2 \le R \le 4$ sein.
Daraus ergeben sich für die Fragen a) – d) folgende Antworten.

a) Die Potenzreihe konvergiert sicher für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 1| < 2$.

b) Die Potenzreihe divergiert sicher für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 1| > 4$.

c) Für den Kovergenzradius $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ gilt: $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \ge 2$.

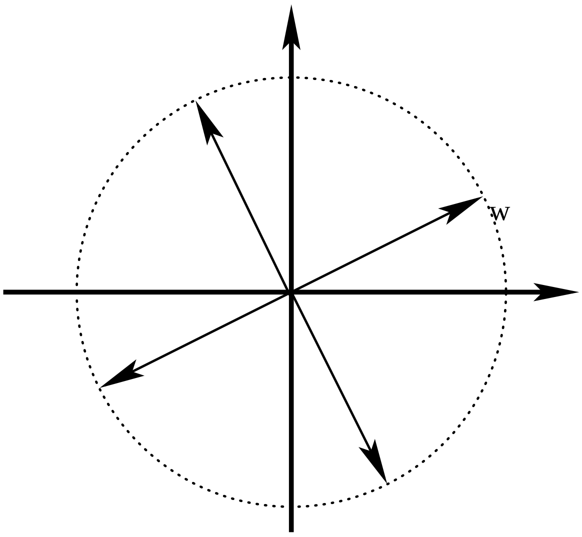
d) Für den Kovergenzradius $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ gilt: $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \le 4$.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Betrachten Sie die Gleichung $z^4 = -7 + 24i$.

1. Die Gleichung hat vier komplexe Lösungen.

2. Die Lösungen haben alle den gleichen Betrag und liegen daher auf einem Kreis . Der Winkelabstand zwischen aufeinanderfolgenden Lösungen ist $\frac{\pi}{2}$.



5. Aufgabe (6 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ und $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ Funktionen.

1.
   - $g \circ f$ ist surjektiv:
     Sei $y \in \mathbb{R}_+ = W_{g \circ f} = W_g$. Da g surjektiv ist, existiert ein $x \in \mathbb{R}_+ = D_g$ mit $g(x) = y$. Da f auch surjektiv ist, existiert zu diesem $x \in \mathbb{R}_+ = W_f$ ein $\tilde{x} \in \mathbb{R} = D_f$ mit $f(\tilde{x}) = x$, also gilt für dieses $\tilde{x}$ auch $g \circ f(\tilde{x}) = g(f(\tilde{x})) = g(x) = y$.
   - $f \circ g$ ist nicht notwendig surjektiv:
     Sei $g(x) = x, x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$, dann ist $f \circ g = 0$, also ist $f \circ g$ nicht surjektiv.

2. $f \circ g$ ist injektiv:

   Für $f \circ g(\tilde{x}) = f \circ g(x)$ gilt $f(g(\tilde{x})) = f(g(x))$ und da f injektiv ist, also $g(\tilde{x}) = g(x)$. Da auch g injektiv ist, folgt $\tilde{x} = x$.

6. Aufgabe (6 Punkte)

1. Lösung
Sei $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x$. Dann ist $f'(x) = x + \cos x$. Mit dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ mit

$$\xi + \cos\xi = \frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{\frac{\pi^2}{8} + 1 - 0}{\frac{\pi}{2} - 0}.$$

2. Lösung
Sei $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x$. Dann ist f stetig .

Da

$$0,8 = \frac{\frac{16}{5}}{4} = \frac{3.2}{4} \geq \frac{\pi}{4} \geq \frac{3}{4} = 0,75 \quad \text{und} \quad 0,7 \geq \frac{2}{3} \geq \frac{2}{\pi} \geq \frac{2}{4} = 0,5$$

gilt (oder irgendeine andere vernünftige Rechnung!),

erhält man

$$f(0) = 1 < 0,75 + 0,5 \leq \frac{\frac{\pi^2}{8} + 1 - 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \leq 0,8 + 0,7 = 1.5 < f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Mit dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ mit $f(\xi) = \xi + \cos\xi = \frac{\frac{\pi^2}{8}+1-0}{\frac{\pi}{2}-0}$.