TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2002/03
FAKULTÄT II - INSTITUT FÜR MATHEMATIK Stand: 20.03.03
Dozenten: Adams, Bärwolff, Förster, Plato, Tröltzsch

Lösungen zur Februar-Vollklausur, Rechenteil, A
„Analysis I für Ingenieure“

(ohne Gewähr)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Induktionsanfang: $n = 0:$ $\frac{4\cdot 0}{3^1} = 1 - \frac{3}{3}$ ist offensichtlich erfüllt.

Schluss von n auf $n+1$:

Ind.vor.: $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{4k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}}$

Ind.beh.: $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{4k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{2n+5}{3^{n+2}}$

Ind.bew.: $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{4k}{3^{k+1}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{4k}{3^{k+1}} + \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} \overset{\text{Ind.vor.}}{=} 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} + \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} = 1 - \frac{6n+9}{3^{n+2}} + \frac{4n+4}{3^{n+2}} = 1 - \frac{2n+5}{3^{n+2}}$

Formel gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

$\frac{4}{|2-x|} < \frac{2}{|x+4|}$ ist definiert für $x \neq 2$ und $x \neq -4$.

1. Fall: $x < -4$

$$4(-x-4) < 2(2-x) \Longleftrightarrow x > -10, \qquad \text{folglich:} \quad L_1 = \,]-10, -4[$$

2. Fall: $-4 < x < 2$

$$4(x+4) < 2(2-x) \Longleftrightarrow x < -2, \qquad \text{folglich:} \quad L_2 = \,]-4, -2[$$

3. Fall: $2 < x$

$$4(x+4) < 2(-2+x) \Longleftrightarrow x < -10, \qquad \text{folglich:} \quad L_3 = \emptyset$$

Gesamtlösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \,]-10, -2[\, \setminus \{-4\}$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

$$(1+i)z^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Lösungen in Polarkoordinatenform:

$$z_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})} \quad \text{für } k = 0,\, 1,\, 2$$

und in kartesischer Form:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = -i$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Es handelt sich um eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ und $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)\sqrt{n^2+1}}$.
Der Konvergenzradius berechnet sich durch:

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+2)\sqrt{(n+1)^2+1}}{(n+1)\sqrt{n^2+1}} = 2$$

Die Randpunkte erfüllen die Gleichung: $|x-3| = 2 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{oder} \quad x = 5$

Für $x = 1$ oder $x = 5$ gilt: $|a_n(x-3)^n| = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{n^2}$

Nach dem Vergleichskrit. ist die Potenzreihe damit für $x = 1$ und $x = 5$ absolut konvergent.
(Alternativ auch das Leibnizkriterium für $x = 5$ möglich.)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

a)
$f(x) = \ln(1+2x), \quad x_0 = 0$

$f'(x) = \frac{2}{1+2x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{4}{(1+2x)^2} \quad \Longrightarrow \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = -4$

Damit erhält man: $T_2(x) = \frac{0}{0!}x^0 + \frac{2}{1!}x^1 + \frac{-4}{2!}x^2 = 2x - 2x^2$

b)
$f'''(x) = \frac{16}{(1+2x)^3} \quad \Longrightarrow \quad R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = \frac{8}{3}\frac{x^3}{(1+2\xi)^3}$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

a)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx$$

Betrachte zuerst: $\int_1^b \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx = \lim_{a\searrow 1} \int_a^b \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx \qquad (b > a > 1)$

Substitution:
$z = \sqrt{x-1} \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}dz = dx \Leftrightarrow 2zdz = dx$ und $x = z^2+1$

(oder $g(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2z}$)

Damit:
$\int_a^b \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx = \int_{z(a)}^{z(b)} \frac{1}{(z^2+1)z}2z\ dz = 2\int_{z(a)}^{z(b)} \frac{1}{z^2+1}\ dz \qquad$ (mit $z(a) = \sqrt{a-1}$ und $z(b) = \sqrt{b-1}$)

$= [2\arctan(z)]_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \qquad \text{oder} = [2\arctan(\sqrt{x-1})]_a^b$

Man erhält also:

$\int\limits_1^b \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx = \lim\limits_{a\searrow 1}(2\arctan(\sqrt{b-1}) - 2\arctan(\sqrt{a-1})) = \arctan(\sqrt{b-1}) - 2\arctan(0) = \arctan(\sqrt{b-1})$

Insgesamt lautet das Ergebnis für das Ausgangsintegral also:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx = \lim_{b\to\infty} 2\arctan(\sqrt{b-1}) = \pi$$

b)

$F(x) = \int \frac{9x+2}{x^2-5x-6}\ dx$

Nennernullstellen:

$x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 6} \Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = -1$

Ansatz: $\frac{9x+2}{x^2-5x-6} = \frac{9x+2}{(x-6)(x+1)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x+1}$

Koeffizientenvergleich: $9x + 2 = (x+1)A + (x-6)B$

$\Rightarrow 9 = A + B$ und $2 = A - 6B \Rightarrow B = 1$ und $A = 8$

$\Rightarrow \frac{9x+2}{x^2-5x-6} = \frac{8}{x-6} + \frac{1}{x+1}$

$F(x) = 8\ln|x-6| + \ln|x+1| + C$