TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Institut für Mathematik SS03
Felsner / Grigorieff / Penn–Karras 21.07.03
Abel / Bohle / Peters

Lösungsskizzen zur Juli-Klausur Analysis I für Ingenieure

Rechenteil

1. Aufgabe (6 Punkte)

Da $z_1 := \frac{1+i\sqrt{15}}{4}$ eine Nullstelle von p ist, und p reelle Koeffizienten besitzt, ist $z_2 := \overline{z_1} = \frac{1-i\sqrt{15}}{4}$ ebenfalls Nullstelle von p.
Demnach ist $p(z)$ durch $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - \frac{z}{2} + 1$ teilbar. Mit Hilfe der Polynomdivision folgt: $p(z) = (2z^2 + 8)(z^2 - \frac{z}{2} + 1)$.
Die beiden letzten Nullstellen von p ($z_3 = -2i$ und $z_4 = 2i$) finden wir nun aus der Gleichung $2z^2 + 8 = 0$.
(B-Klausur geht genauso: $p(z)$ wird durch $z^2 - z + 1$ geteilt. Dabei erhält man das Polynom $z^2 - 2z + 2$ mit den Nullstellen $1 \pm i$.)

2. Aufgabe (6 Punkte)

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)-2x}{x^3} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)-2}{3x^2} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-4\sin(2x)}{6x} = -\frac{4}{3} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = -\frac{4}{3}$;

(b) f ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig (als Bruch elementarer stetiger Funktionen).
An der Stelle $x = 0$ ist f nicht stetig, denn $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

3. Aufgabe (9 Punkte)

(a) $f'(x) = 5 + \cos(x) + \exp(x) \geq 4 + \exp(x) > 0, \ x \in \mathbb{R}$.
Weil die Funktion f überall positive Ableitung besitzt, ist sie auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, und sonach injektiv.
Da darüber hinaus $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, ist die stetige (!) Funktion f auch surjektiv.

Als bijektive Funktion besitzt f eine Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) $\quad (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{7}$.

(B-Klausur: Teil (a) geht genauso, bei Teil (b) kommt 1/8 raus.)

4. Aufgabe

(8 Punkte)

(a) $\quad g'(x) = -\exp(-x)(2x^2 - 5x)$, daher gilt $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 5/2$. Auf $]-\infty, 0] \cup [5/2, \infty[$ besitzt f nichtpositive Ableitung und ist daher dort monoton fallend.

Auf $[0, 5/2]$ besitzt f nichtnegative Ableitung und ist daher dort monoton wachsend.

Die Funktion f besitzt demnach lokales Minimum in $x = 0$ und lokales Maximum in $x = 5/2$.

(b) $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \ \ (> f(0))$; Es gibt also kein globales Maximum. Das globale Minimum wird an der Stelle $x = 0$ angenommen.

5. Aufgabe

(11 Punkte)

(a) Es sei $x > 0$ beliebig. Wir zeigen die angegebene Formel mittels Induktion über $n \geq 1$:

Induktionsanfang: $\quad f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{(-1)^2 \cdot 0!}{x^1}$, die Formal ist also richtig für $n = 1$;

Induktionsvoraussetzung: $\quad$ die Formel sei wahr für ein natürliches $n \geq 1$;

Induktionsschluß: $\quad$ dann gilt die Formel auch für $n + 1$, weil

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \overset{IV}{=} \left(\tfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{x^n}\right)' \\ &= (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (-n) \cdot x^{-n-1} = \tfrac{(-1)^{n+2}\cdot n!}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

(b) $\quad$ Das Taylorpolynom zweiten Grades von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ lautet

$T_2(x) = f(2) + f'(2) \cdot (x-2) + \frac{f''(2)}{2} \cdot (x-2)^2 = \ln(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2$.

Der Fehler $R_2(x)$ für $x \in [\frac{19}{10}, \frac{21}{10}]$ läßt sich mit Hilfe der Taylorformel wie folgt abschätzen:

$$|R_2(x)| = \left|\tfrac{f'''(\xi)}{3!}(x-2)^3\right| = \tfrac{2}{\xi^3 \cdot 3!}|x-2|^3 \leq \tfrac{1}{3\,(19/10)^3\cdot 10^3} = \tfrac{1}{3\cdot 19^3},$$

ξ bezeichnet dabei eine Stelle zwischen x und 2.

<u>Verständnisteil</u>

1. Aufgabe (6 Punkte)

Ansatz: $z = re^{\varphi i}$. Dann ist $z^4 = r^4 e^{4\varphi i}$ und die Lösungen der Gleichung sind von der Form $z = 2e^{\varphi i}$ mit $\varphi \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
(B-Klausur: $z = 3e^{\varphi i}$ mit $\varphi \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.)
Alternativ: Substitution $w = z^2$, dann zwei quadratische Gleichungen lösen und Lösungen umrechnen in Polarkoordinaten.

2. Aufgabe (12 Punkte)

a) Stimmt. Die Partialsummenfolge ist monoton und beschränkt. Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Insbesondere ist a_n eine Nullfolge, und damit konvergent.

b) Stimmt nicht. Gegenbeispiel $b_n = (-1)^n 1/n$.

c) Stimmt nicht. Gegenbeispiele:

- $c_n = 1/n$ und $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
- f beliebige Funktion mit $f(0) = 1$ und f unstetig in 0 und $c_n = 0$
- $c_n = 1/n$ und $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \text{ oder } x = 1/n \text{ für } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

(B-Klausur: 1 wird durch 2 ersetzt.)

3. Aufgabe (6 Punkte)

Jede konvergente Potenzreihe ist in ihrem Konvergenzkreis gliedweise differenzierbar (Satz aus der Vorlesung). Es gilt damit

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k a_k (x-2)^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-2)^k.$$

Dies ist die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 2.
(B-Klausur: 2 wird durch 1 ersetzt.)

4. Aufgabe (8 Punkte)

a) Stimmt nicht. Beispiel $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$.

b) Stimmt nicht. Beispiel $f(x) = |x|$.

5. Aufgabe (8 Punkte)

a) Da eine Reihe im Innern ihres Konvergenzkreises absolut konvergiert und außerhalb divergiert, muss i im Innern oder auf dem Rand liegen. Die Reihe konvergiert in der offenen Kreisscheibe von Radius $\sqrt{2}$ um -1. Also insbesondere in den Punkten $-1-i$ und -2. Für die Punkte $1+i$, $-i$ und 2 kann man keine Aussage machen.

b) Da eine Reihe im Innern ihres Konvergenzkreises absolut konvergiert und außerhalb divergiert, muss i auf dem Rand liegen. Also konvergiert die Reihe in $-1-i$ und -2. Sie divergiert in $1+i$ und 2. Da $-i$ auf dem Rand liegt, kann man keine Aussage üeber diesen Punkt treffen.