April – (Voll-) Klausur
Analysis I für Ingenieure

Lösungen

Rechenteil

1. Aufgabe 7 Punkte

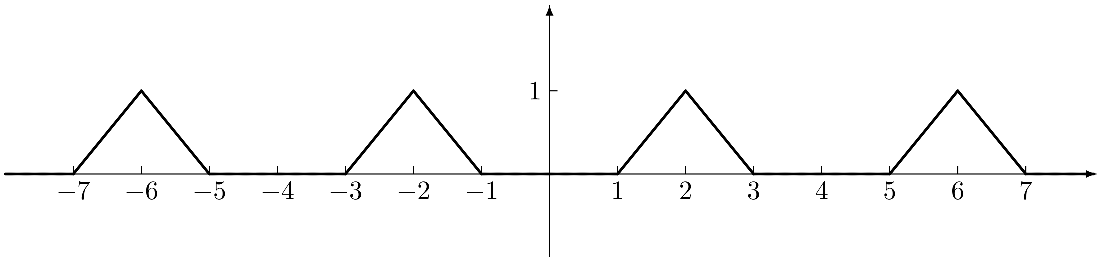
(a) Skizzieren Sie die 4-periodische Funktion mit $f(x) = 0$ für $|x| \leq 1$ und $f(x) = |x| - 1$ für $1 \leq |x| \leq 2$.

(b) Berechnen Sie für diese Funktion die Fourierkoeffizienten a_{2k+1}.

Lösung

(a)

Graph von f



(b) Es ist $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$. Zur Abkürzung setzen wir $s_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. Die Funktion f ist gerade und somit gilt

$$
\begin{aligned}
a_{2k+1} &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos((2k+1)\omega x)\,dx = \int_1^2 (x-1)\cos s_k x\,dx \\
&= \frac{(x-1)\sin s_k x}{s_k}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{\sin s_k x}{s_k}\,dx = \frac{(x-1)\sin s_k x}{s_k}\Big|_1^2 + \frac{\cos s_k x}{s_k^2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{\sin 2s_k}{s_k} + \frac{\cos 2s_k}{s_k^2} - \frac{\cos s_k}{s_k^2} = -\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe 6 Punkte

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $iz^2 + (2+i)z = i - 1$.
Geben Sie die Lösungen in der Form $a + bi$ an.

Lösung

Nach Abziehen von $(i-1)$ auf beiden Seiten und Multiplizieren mit $-i$ erhält man die Gleichung

$$z^2 + (1-2i)z - (1+i) = 0,$$

die man mit der p-q-Formel lösen kann:

$$z_{1,2} = \frac{2i-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-2i)^2 + 4(1+i)}{4}} = \frac{2i-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}, \quad \text{d.h.} \quad z_1 = i, \quad z_2 = -1 + i.$$

Vollklausur – Rechenteil

3. Aufgabe

6 Punkte

Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x^2+x^3}\,dx$.

Lösung

Partialbruchzerlegung: Es sind A, B und C zu bestimmen, so dass

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x^2+x^3} &= \frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}\\ &= \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)} = \frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x+1)}\end{aligned}$$

gilt. Koeffizientenvergleich liefert $A = 2$, $B = -1$ und $C = -2$.
Damit erhält man

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x-1}{x^2+x^3}\,dx &= 2\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx - 2\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx\\ &= 2\ln x\Big|_1^2 + \frac{1}{x}\Big|_1^2 - 2\ln(x+1)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{2} - 2\ln 3 + 2\ln 2 = 2\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. Aufgabe

6 Punkte

Untersuchen Sie jeweils, ob die Integrale

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-x}\,dx$

divergent oder konvergent sind. Der Wert muss *nicht* berechnet werden.

Lösung

(a) Mit der Substitution $u = \ln x$ erhalten wir $x = e^u$ und $dx = e^u du$. Damit erhalten wir

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\ln R} u\,du = \int_0^\infty u\,du.$$

Also ist das Integral divergent. Ein alternativer Lösungsweg ist

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx + \int_e^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx \geq \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx + \int_e^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty.$$

(b) Für $1 < R < \infty$ gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_1^R xe^{-x}\,dx &= (-xe^{-x})\Big|_1^R + \int_1^R e^{-x}\,dx\\ &= -Re^{-R} + e^{-1} - e^{-R} + e^{-1} = -(R+1)e^{-R} + 2e^{-1}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\int_1^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(-(R+1)e^{-R}\right) + 2e^{-1} = 2e^{-1}.$$

Also ist das Integral konvergent.

Vollklausur – Rechenteil

5. Aufgabe

8 Punkte

(a) Sei $f(x) = (x+1)\arctan e^{-2x}$. Berechnen Sie $f'(0)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $y = e^x \cos x$ der Differentialgleichung $y^{(4)} + 4y = 0$ genügt.

Lösung

(a) Es gilt

$$f'(x) = \arctan e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x}\frac{1}{1+e^{-4x}} \quad \text{und} \quad f'(0) = \arctan 1 - 1 = \frac{\pi}{4} - 1.$$

(b) Die ersten vier Ableitungen von y sind gegeben durch

$$\begin{aligned} y' &= e^x \cos x - e^x \sin x & y'' &= e^x \cos x - e^x \sin x - e^x \sin x - e^x \cos x = -2e^x \sin x \\ y''' &= -2(e^x \sin x + e^x \cos x) & y^{(4)} &= -2(e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x) = -4e^x \cos x = -4y. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus der Gleichung $y^{(4)} = -4y$.

6. Aufgabe

7 Punkte

Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}} \quad .$$

Untersuchen Sie auch die Randpunkte.

Lösung

Der Konvergenzradius der Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und Koeffizienten $a_n = \frac{3^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$ ist

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\sqrt{(3(n+1)-2)2^{n+1}}}{3^{n+1}\sqrt{(3n-2)2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n-2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Im letzten Schritt haben wir die Stetigkeit der Wurzelfunktion im Punkt 1 ausgenutzt. Es bleibt noch das Konvergenzverhalten in den Randpunkten $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ zu untersuchen. Für $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(\frac{\sqrt{2}}{3})^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n-2)}} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}. \tag{1}$$

Die Potenzreihe ist divergent in dem Punkt $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$, weil die harmonische Reihe divergent ist. Für $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(-\frac{\sqrt{2}}{3})^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(3n-2)}}.$$

Aus $\frac{1}{\sqrt{3(n+1)-2}} < \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$ folgt, dass die Folge $\frac{1}{\sqrt{3n-2}}$ eine monotone Nullfolge ist. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Potenzreihe im Punkt $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$. Sie konvergiert jedoch nicht absolut (siehe (1)).

Verständnisteil

1. Aufgabe

6 Punkte

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar?

Lösung

Auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Für die Differenzierbarkeit im Punkt 0 muss man überprüfen, ob für $x \to 0$ der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \cos \frac{1}{x}$$

konvergiert. Die Folge $x_n = \frac{1}{\pi n}$ ist eine Nullfolge. Die Folge $\cos \frac{1}{x_n} = \cos \pi n = (-1)^n$ konvergiert nicht. Daher ist die Funktion f nicht differenzierbar im Nullpunkt.

2. Aufgabe

8 Punkte

Untersuchen Sie jeweils, ob die Aussage *wahr* ist (ohne Begründung) oder finden Sie ein Gegenbeispiel, das die Aussage *widerlegt*.

(a) Seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $(a_n) \to -\infty$, $(b_n) \to \infty$.
Dann gilt $(a_n + b_n) \to 0$

(b) Sei f eine ungerade, p-periodische Funktion. Dann gilt $\displaystyle\int_0^{4p} f(x)\, dx = 0$

(c) Das Integral einer stetigen Funktion ist genau dann gleich null, wenn die Funktion überall null ist.

(d) Sei $p(x)$ ein Polynom und $p_4(x)$ sein Taylorpolynom 4. Grades mit beliebig gewähltem Entwicklungspunkt. Dann gilt: Ist der Grad von $p(x)$ höchstens 4, so ist das Restglied von $p_4(x)$ gleich null.

Lösung

(a) falsch. Gegenbeispiel: $a_n = -n$, $b_n = n + 1$, aber $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 1$.

(b) wahr.

(c) falsch. Gegenbeispiel: $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$.

(d) wahr.

Vollklausur – Verständnisteil

3. Aufgabe

7 Punkte

Bestimmen Sie näherungsweise den Funktionswert $\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{10})$ mittels Taylorapproximation. Der Fehler Ihrer Näherung soll dabei kleiner sein als 10^{-5}.

Lösung

Wir betrachten die Taylorentwicklung des Sinus mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Das Restglied der n-ten Taylorapproximation an der Stelle $x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{10}$ ist gegeben durch

$$R_n(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{10}) = \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\frac{1}{10^{n+1}}, \qquad \xi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\frac{1}{10}).$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\sin^{(n+1)} x| \leq 1$ und somit ist

$$|R_n(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{10})| \leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^5} \quad \text{für} \quad n \geq 3.$$

Also liefert der Wert des 3-ten Taylorpolynoms an der Stelle $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{10}$ eine Näherung mit der gewünschten Genauigkeit:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{10}) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\sin^{(i)}(\pi/2)}{i!}\frac{1}{10^i} = 1 - \frac{1}{2!\cdot 10^2} = \frac{199}{200}.$$

Wegen $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$ könnte man bei dieser Aufgabe genauso gut die Taylorentwicklung des Cosinus mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ benutzen.

4. Aufgabe

7 Punkte

Ein Polynom 2. Grades hat bei $x_0 = 2$ ein lokales Extremum und an der Stelle $x_1 = 1$ die Tangente $t(x) = -6x + 6$. Geben Sie dieses Polynom an.

Lösung

Ein Polynom 2. Grades hat die Form $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Die erste Ableitung ist $p'(x) = a_1 + 2a_2x$. Da p bei 2 ein lokales Extremum hat, gilt notwendigerweise $p'(2) = 0$ und somit

$$a_1 + 4a_2 = 0. \tag{2}$$

Für die Tangente an der Stelle 1 gilt nach Voraussetzung $t(x) = -6x + 6$. Also müssen die Gleichungen $p'(1) = t'(1) = -6$ und $p(1) = t(1) = 0$ gelten. Es folgen

$$a_1 + 2a_2 = -6 \tag{3}$$

und

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0 \tag{4}$$

Aus (2) und (3) erhält man $a_1 = -12$ und $a_2 = 3$. Einsetzen in (4) liefert $a_0 = 9$. Das gesuchte Polynom ist also $p(x) = 9 - 12x + 3x^2$.

Vollklausur – Verständnisteil

5. Aufgabe

6 Punkte

Zeigen Sie, dass $\tan^2 x$ und $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ dieselbe Ableitung haben und folgern Sie daraus eine Beziehung zwischen diesen beiden Funktionen.

Lösung

Es gilt

$$
\begin{aligned}
(\tan^2 x)' &= 2\tan x \tan' x = 2\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\\
\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' &= \frac{-2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.
\end{aligned}
$$

Weil die Ableitungen gleich sind, sind $\tan^2 x$ und $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ Stammfunktionen derselben Funktion (nämlich $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$). Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unterscheiden sie sich nur um eine additive Konstante.

6. Aufgabe

6 Punkte

Skizzieren Sie alle Lösungen der folgenden Ungleichung in der komplexen Zahlenebene.

$$|z-i| \geq |z+2+i|$$

Lösung

Mit $z = x + iy$ gilt

$$
\begin{aligned}
|z-i| \geq |z+2+i| \quad &\Leftrightarrow \quad |x+i(y-1)| \geq |(x+2)+i(y+1)|\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+(y-1)^2 \geq (x+2)^2+(y+1)^2\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2y+1 \geq x^2+4x+4+y^2+2y+1\\
&\Leftrightarrow \quad y \leq -x-1
\end{aligned}
$$

Lösungsmenge