Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 04
Bärwolff, Grigorieff 19.07.04

Juli – Klausur (Rechenteil)
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Falls Ihr Studiengang 40% Hausaufgaben fordert:
In welchem Semester haben Sie die erreicht? ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe
6 Punkte

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{4k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}}.$$

2. Aufgabe
5 Punkte

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert mit

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1, \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge durch 2 nach oben beschränkt und monoton ist.

(b) Ist die Folge konvergent? Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

3. Aufgabe
5 Punkte

Die Funktion

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1} + \frac{2x+1}{2x+2}$$

ist auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ stetig.

(a) Ist die Unstetigkeit in -1 hebbar? Wenn ja, berechnen Sie $\lim_{x\to-1} f(x)$.

(b) Ist die Unstetigkeit in 1 hebbar? Wenn ja, berechnen Sie $\lim_{x\to 1} f(x)$.

4. Aufgabe
7 Punkte

Berechnen Sie die erste Ableitung von $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit

(a) $f(x) = \frac{1-x^2}{(1-x)^2}$, $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

(b) $f(x) = \cosh(\cos(x^4))$, $\quad D = \mathbb{R}$.

Sei die Funktion f definiert als

$$f : [1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \ln x$$

(c) Berechnen Sie die erste Ableitung von f^{-1}, der Umkehrfunktion von f, an der Stelle $y = 2e^2$.
Hinweis: $f^{-1}(2e^2) = e^2$.

5. Aufgabe

8 Punkte

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften.

1) Die Funktion f ist an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ strikt positiv, also

$$f(x) > 0 \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

2) Die Funktion f erfüllt die Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x)\cos(x).$$

3) Von der Funktion f sind die folgenden Funktionswerte bekannt.

$$f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e}, \quad f(0) = 1, \quad f(\frac{\pi}{2}) = e$$

4) Die Funktion f ist drei mal differenzierbar mit

$$f^{(3)}(x) = f(x)\cos(x)\sin(x)\big(\sin(x) - 3\big).$$

Bitte überprüfen Sie diese Darstellung **nicht**.

Bearbeiten Sie nun die beiden folgenden Aufgaben.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom von $f(x)$ vom Grad 2 mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

(b) Geben Sie das zugehörige Restglied an und schätzen Sie seinen Betrag auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ab.

6. Aufgabe

9 Punkte

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx$

(c) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

Elementare Funktionen sind für bekannte Argumente auszuwerten.