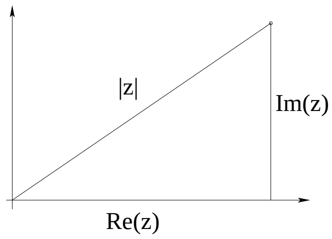
Vollklausur VERSTÄNDNISTEIL: LÖSUNGEN

1. Zeichnen.

(a) $M_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq (x-1)^2 \text{ und } y^2 + (x-1)^2 < 1\}$
Parabel mit Extremstelle $(1, 0)$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$, Kreis mit Mittelpunkt $(1, 0)$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$
, Schnitt insbes Kennzeichnung, wo und wo nicht der Rand dazugehört $\boxed{\text{1 Punkt}}$.

(b) $M_b = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) = |z|\}$
$z \in M_b$ muss positiven Realteil haben, denn Re $(z) = |z| \geq 0$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Und der Imaginärteil muss Null sein $\boxed{\text{1 Punkt}}$ wg.



Da es keine weiteren Einschränkungen gibt, ist $M_b = \mathbb{R}_+$.
Formale Alternative: Wir schreiben $z \in \mathbb{C}$ als $z = x + iy$.

$$\begin{array}{lrcl} & \mathrm{Re}(z) & = & |z| \\ \Leftrightarrow & x & = & \sqrt{x^2+y^2} \quad |\text{quadrieren} \\ \Leftrightarrow & x^2 = x^2 + y^2, & x > 0 & | - x^2 \\ \Leftrightarrow & 0 = y^2, & x > 0 & \\ \Leftrightarrow & 0 = y, & x > 0 & \end{array}$$

(c) $M_c = \{z \in \mathbb{C} | |z - e^{i\frac{\pi}{4}}| \geq 2\}$
$e^{i\frac{\pi}{4}}$ zeichnen $\boxed{\text{1 Punkt}}$, Kreisform erkennen mit korrektem Radius, insbes Ursprung $\notin M_c$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$, Rand der Scheibe gehört dazu $\boxed{\text{1 Punkt}}$

2. Konvergenzuntersuchung.

(a) $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$ und $(\cos(n\pi))_n = (-1)^n$ ist unbestimmt divergent $\boxed{\text{1 Punkt}}$
daher ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbestimmt divergent $\boxed{\text{1 Punkt}}$

(b)

$$(1 + \frac{2}{n+2})^{n+5} = (1 + \frac{2}{n+2})^{n+2}(1 + \frac{2}{n+2})^3 \boxed{\text{1 Punkt}} \to e^2.1 = e^2 \boxed{\text{1 Punkt}}$$

(c) da $\sqrt[n]{n} \to 1$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$
und $\sqrt[n]{n} > 1$ folgt $c_n \to +\infty$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

3. Stetigkeit/ Stetigkeit und Diff.barkeit

(a) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $f(x)$ stetig, als Komposition stetiger Funktionen $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Damit $f(x)$ stetig in $x = 0$ ist, soll gelten

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} f(x) = f(0) = \cosh(0) = 1. \qquad \boxed{\text{1 Punkt} \mid \text{Ansatz}}$$

Wir haben

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \alpha \cos^2(x) = \alpha \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

und

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \cosh(x) = 1. \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Ergebnis: Stetigkeit von f in $x = 0$ für $\alpha = 1$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

(b) f kann nicht für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ differenzierbar sein.
Begründung. Damit eine Funktion differenzierbar sein kann, muss sie erstmal stetig sein (Stetigkeit ist notwendig für Differenzierbarkeit). Darum kommen nur Lösungen für α aus Teil a) in Frage. f **kann höchstens** für $\alpha = 1$ in 0 differenzierbar sein.
$\boxed{\text{2 Punkte}}$

4. Anwendung MWS Diff.rechnung.
$g(x) = f(x)\cos(x)$ erfüllt $g(-\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $g'(x) = f'(x)\cos(x) - f(x)\sin(x)$
$\boxed{\text{1 Punkt}}$
Anwendbarkeit des MWS für $g:$ g diff.bar als Produkt diff.barer Funktionen. $\boxed{\text{1 Punkt}}$ Also

$$\frac{g(\frac{\pi}{2}) - g(-\frac{\pi}{2})}{\pi} = g'(\xi) \text{ für ein } \xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

und mit dem MWS gibt es ein $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $g'(\xi) = 0$,
d.h. $f(\xi)\sin(\xi) = f'(\xi)\cos(\xi)$ für ein $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

5. Stammfunktionen.

$$\int (f(5x+3) + xf(x^2))dx = \int f(5x+3)dx + \int xf(x^2)dx \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}\boxed{\text{Summe}}$$

$$= \int \frac{1}{5} f(y)dy + \frac{1}{2} \int f(z)dz \qquad y = 5x+3, z = x^2 \qquad \boxed{\text{1+1 Punkte}}\boxed{\text{pro Subst.}}$$

$$= \frac{1}{5}F(y) + \frac{1}{2}F(z) + C \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

$$= \frac{1}{5}F(5x+3) + \frac{1}{2}F(x^2) + C \qquad \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Oder alternativ:
Eine Stammfkt von $f(5x+3)$ ist $\frac{1}{5}F(5x+3)$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$
wg. $(\frac{1}{5}F(5x+3))' = \frac{1}{5}F'(5x+3)(5x+3)' = f(5x+3)$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Eine Stammfkt von $f(x^2)x$ ist $\frac{1}{2}F(x^2)$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$
wg. $(\frac{1}{2}F(x^2))' = \frac{1}{2}F'(x^2)(x^2)' = xf(x^2)$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Dann ist $\frac{1}{5}F(5x+3) + \frac{1}{2}F(x^2)$ eine Stammfkt. von $f(5x+3) + f(x^2)x$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$
Dann sind alle Stammfkt. von $f(5x+3) + f(x^2)x$ der Form
$\frac{1}{5}F(5x+3) + \frac{1}{2}F(x^2) + C$, wobei C eine Konstante ist. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

6. Integralabschätzung

(a) $f(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} = f(x)$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

(b) Mon. wachsend auf $[0, \infty)$, wenn die Abl. dort nicht negativ ist. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - x^2 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \geq 0 \text{ für} x \geq 0 \quad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

(c) glob. Min existiert $\boxed{\text{1 Punkt}}$, glob. Max existiert nicht $\boxed{\text{1 Punkt}}$.
Begründung (nicht verlangt):
$f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Und die untere Schranke wird als Funktionswert angenommen, in der Stelle Null $f(0) = 0$ (Die Stelle 0 gehört zum Definitionsbereich.). Darum ist 0 das globale Minimum.
Ein globales Maximum existiert nicht, da die Funktion streng monoton steigt und das Intervall nach rechts offen ist.

(d) Zeichnung: deutlich wird die Monotonie auf $[0, \infty[$ aus Aufgabenteil b), die Symmetrie des Graphen an der y-Achse aus Aufgabenteil a) und die Beschränktheit (mit Schranke 1) $\boxed{\text{1 Punkt}}$; Begründung (nicht verlangt):

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

durch hinsehen: x grosz $\Rightarrow x^2 \approx x^2 + 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} \approx 1$ oder formal

$$\begin{aligned} x^2 : (x^2+1) &= 1 - \frac{1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1+x^2} &= \lim_{x \to \infty} 1 - \frac{1}{1+x^2} = 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^2} = 1 + 0 \end{aligned}$$

(e) Graphische Lösung muss sehr überzeugend sein, damit es Punkte gibt. Insbesondere ist eine eigene Skizze für diesen Aufgabenteil notwendig. Alternativ:

$$\begin{aligned} &\text{Monotonie:} f(x) \leq f(1), \text{ für } x \in [0,1] \\ &\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 f(1)dx = f(1) \int_0^1 dx = f(1)1 = \frac{1}{2} \boxed{\text{1 Punkt}} \end{aligned}$$

Alternativ: Da f stetig ist, darf man den MWS der Integralrechnung anwenden. Es gibt dann ein $\xi \in (0,1)$, so dass die erste Gleichheit gilt.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = (1-0) \frac{\xi^2}{\xi^2+1} \overset{\text{Monoton steigend}}{\leq} 1 f(1) = \frac{1^2}{1^2+1} = \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

(f) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2+1} dx = 2\frac{1}{4}(4-\pi) = \frac{1}{2}(4-\pi)$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Begründung (nicht verlangt):

Graphisch: Wg. der Symmetrie des Graphens an der y-Achse sind die Flächen unter dem Graphen über den Intervallen $[0,1]$ und $[-1,0]$ gleich.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)dx \\ \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

Alternativ: formal mit Aufgabenteil a)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_{-1}^0 f(-(-x))dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &\overset{\text{Subst.} y=-x}{=} \int_{-(-1)}^{-0} \underbrace{f(-y)}_{=f(y)}(-1)dy + \int_0^1 f(x)dx \\ &= -\int_1^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &= 2\int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$