Februar-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen – Rechenteil

1. Aufgabe (6 Punkte)

Induktionsanfang $n = 2$:

$$\sum_{k=2}^{2} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{2}{2^1} = 1 = 3 - \frac{2+2}{2^{2-1}}\,,$$

d.h. die Formel gilt für $n = 2$.

Induktionsvoraussetzung: $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} = 3 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$

Induktionsbehauptung: $\sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{k}{2^{k-1}} = 3 - \frac{n+3}{2^{n}}$

Induktionsbeweis:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{k}{2^{k-1}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} + \frac{n+1}{2^n} \overset{\text{Ind.Vor.}}{=} 3 - \frac{n+2}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} = 3 - \frac{2(n+2)-(n+1)}{2^n} = 3 - \frac{n+3}{2^n}\,.$$

3. Aufgabe (5 Punkte)

$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Maximaler Definitionsbereich: $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ und $x \neq 1$, d.h. $-1 \leq x < 1$.

Also ist $D_f = [-1, 1[$.

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3(1+x)}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

4. Aufgabe (6 Punkte)

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(1-x) - x^2 \qquad & f(1) &= 1 - 1 = 0 \\ f'(x) &= \sin(1-x) - 2x \qquad & f'(x) &= 0 - 2 = -2 \\ f''(x) &= -\cos(1-x) - 2 \qquad & f''(x) &= -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

$T_2(x) = -2(x-1) - \frac{3}{2!}(x-1)^2 = -2(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$.

$f(\frac{3}{2}) \approx -2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{11}{8}$.

Februar-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen – Rechenteil

2. Aufgabe (4 Punkte)

$$a_n = \frac{1}{n+1}\Big[3n - \frac{(n-\arctan n)^3}{2n^2+1}\Big] = \frac{3}{1+\frac{1}{n}} - \frac{(1-\frac{\arctan n}{n})^3}{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n^2})}\,.$$

Folglich ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{1} - \frac{1}{1\cdot 2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}\,.$

5. Aufgabe (11 Punkte)

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{4}{x+1}\,, \qquad f'(x) = 3x - 4 + \frac{4}{(x+1)^2}\,, \qquad f''(x) = 3 - \frac{8}{(x+1)^3}\,.$$

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x(x+1)^2 - 4(x+1)^2 + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x(3x^2+2x-5) = 0$$

Nullstellen von f': $x_1 = 0\,,\; x_{2,3} = -\frac{2}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{4+60} = \frac{-1\pm 4}{3}$, d.h. $x_2 = -\frac{5}{3}$ und $x_3 = 1$.

$$f''(0) = 3 - 8 < 0, \quad f''(-\frac{5}{3}) = 3 - \frac{8}{(-\frac{2}{3})^3} = 3 + 27 > 0, \quad f''(1) = 3 - \frac{8}{8} > 0.$$

Folglich hat f in $x = 0$ ein lokales Maximum und in $x = -\frac{5}{3}$ und $x = 1$ lokale Minima.
Wegen $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x) = \infty$ besitzt f kein globales Maximum (oder $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$).
Wegen $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x) = -\infty$ besitzt f kein globales Minimum.

6. Aufgabe (8 Punkte)

a) Partialbruchzerlegung: $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$
$\frac{x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \;\;\Rightarrow\;\; x = A(x+2) + B(x-1) \;\;\Rightarrow\;\; A = \frac{1}{3},\; B = \frac{2}{3}.$

$$\int \frac{x}{x^2+x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|x+2| + c$$

b) Substitution $t = \sqrt{x},\; dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}} &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{\sqrt{b}} \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\lim_{b\to\infty}\big[\arctan t\big]_1^{\sqrt{b}} \\ &= 2\lim_{b\to\infty}\big(\arctan\sqrt{b} - \arctan 1\big) = 2\big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\big) = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$