Februar-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen – Verständnisteil

1. Aufgabe (5 Punkte)

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{b-|a-2x|}}, \quad b > 0$

$|a-2x| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a-2x < b$

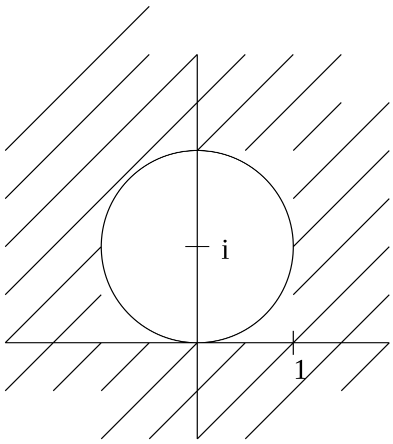
Aus $-b < a - 2x$ folgt $x < \frac{a+b}{2}$, aus $a - 2x < b$ folgt $x > \frac{a-b}{2}$.

Der größtmögliche Definitionsbereich ist $D_f =]\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}[$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) $z = (1+i)^{20} = (1+2i+i^2)^{10} = (2i)^{10} = 2^{10} \cdot i^{10} = -2^{10} \Rightarrow \ \mathrm{Re}(z) = -2^{10}, \ |z| = 2^{10}$.

b)



(mit Rand)

c) Es muss gelten $z = t \cdot i$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$.

3. Aufgabe (8 Punkte)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 \cos \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h^2 \cos \frac{1}{h} = 0\,,$$

denn $0 \leq |h^2 \cos \frac{1}{h}| \leq h^2$ und $\lim\limits_{h \to 0} h^2 = 0$.

Also ist f in $x = 0$ differenzierbar und folglich auch stetig.

Für $x \neq 0$ ist f als Kombination differenzierbarer Funktionen differenzierbar, und daher auch stetig.

Oder: Für $x \neq 0$ ist $f'(x) = 3x^2 \cos \frac{1}{x} + x^3 \cdot (-\sin \frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 3x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}$,
also ist f differenzierbar und somit auch stetig.

Februar-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen – Verständnisteil

4. Aufgabe (4 Punkte)

Da $p(x)$ reelle Koeffizienten hat, ist auch $-i$ eine doppelte Nullstelle.

Da der Grad von $p(x)$ ungerade ist und die Koeffizienten reell sind, hat $p(x)$ auch noch eine reelle Nullstelle.

Also gibt es insgesamt 3 verschiedene Nullstellen.

Beispiele: $p(x) = (x-a)(x-i)^2(x+i)^2$ bzw. $p(x) = (x-a)(x^2+1)^2$ mit $a \in \mathbb{R}$
(<u>ein</u> konkretes Beispiel wie $x(x^2+1)^2$ reicht).

5. Aufgabe (10 Punkte)

a) $f(-x) = |-x-1| + |-x+1| = |x+1| + |x-1| = f(x)$, d.h. f ist gerade.

b) $f(-x) = \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) = -f(x)$, d.h. f ist ungerade.

c) $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, d.h. f ist ungerade.

d) $f(2) = 2-2 = 0$, $f(-2) = -2-2 = -4$, d.h. f ist weder gerade noch ungerade.

e) $f(-x) = (-x)\sin(-x) = (-x)\cdot(-\sin x) = x\sin x = f(x)$, d.h. f ist gerade.

6. Aufgabe (5 Punkte)

Wahr sind a), c) und e).