Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 04/05
Förster, Hömberg, Penn-Karras, Pfetsch, Tischendorf 04.04.2005

April – Klausur (Verständnisteil)
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe
7 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + \frac{1}{2}\cos x$ auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar ist. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $\frac{1}{2}$.

2. Aufgabe
5 Punkte

Geben Sie für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(2x)$ eine Abschätzung für den Betrag der n-ten Ableitung $f^{(n)}(x)$ an (ohne Beweis). Zeigen Sie anschließend, dass für das Taylorpolynom n-ter Ordnung dieser Funktion mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Restgliedabschätzung $|R_n\left(\frac{1}{2}\right)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$ gilt.

3. Aufgabe
7 Punkte

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & \text{für } x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} - \frac{1}{2}\cos x & \text{für } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

differenzierbar?

4. Aufgabe
7 Punkte

Notieren Sie für die folgenden Ausdrücke die Ansätze für die Zerlegung in reelle Partialbrüche.

a) $\dfrac{x^2}{(x^2-2)(x+1)}$ b) $\dfrac{x^2-x}{(x-1)^3}$ c) $\dfrac{7x^2}{x^3+1}$

5. Aufgabe
6 Punkte

Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, und zeigen Sie dessen Gültigkeit am Beispiel der Funktion $f(x) = \ln x$ im Intervall $[1, e]$.

6. Aufgabe
8 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind (ohne Begründung). Antworten Sie **nicht** auf diesem Klausurblatt. Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, jede falsche einen Punkt Abzug. Minimale Punktzahl ist 0.

Die Funktionen $f\colon [a,b] \to [a,b]$ und $g\colon [a,b] \to [a,b]$ seien differenzierbar für $x \in [a,b]$, und es sei $f(a) > 0,\ f(b) < 0,\ g(a) > 0,\ g(b) > 0$ und $g'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$.
Dann gilt:

a) f und g sind stetig auf $[a,b]$.

b) f besitzt mindestens eine Nullstelle in $]a,b[$.

c) g besitzt genau eine Nullstelle in $]a,b[$.

d) Ist f injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

e) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

f) Es existiert ein $x_0 \in [a,b]$, so dass g an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente hat.

g) Es ist $g(b) > g(a)$.

h) Es ist $0 \in [a,b]$.