April-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen - Verständnisteil

1. Aufgabe 9 Punkte

Z.B.:
a) $a_n = \frac{1}{n^2}$ und $b_n = n$

b) $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{n}{\sqrt{2}}$

c) $a_n = -\frac{1}{n}$ und $b_n = n^2$

2. Aufgabe 9 Punkte

Es ist

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} \sin x = 0,$$

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0}(\sin x \ln x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= -\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \cdot 0 = 0.$$

Folglich: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$,

d.h. f ist in $x = 0$ stetig.

Für alle $x \neq 0$ ist f auch stetig (da aus stetigen Funktionen zusammengesetzt!), also ist f stetig für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Aufgabe 8 Punkte

$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
$p(0) = -2$ folglich $a_0 = -2$
$p(1) = a_3 + a_2 + a_1 - 2 = 0$
$p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$
$p'(0) = a_1 = 0$
$p''(x) = 6a_3x + 2a_2$
$p''(0) = 2a_2 > 0$
Damit hat z.B. das Polynom $p(x) = x^3+x^2-2$ die verlangten Eigenschaften.

4. Aufgabe 8 Punkte

a) $|z - (-i)|$ ist der Abstand vom Punkt z zum Punkt $-i$.
Folglich ist M_1 die Menge aller Punkte im Innern des Kreises um $-i$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$ (ohne den Rand)

b) $\frac{|x|}{2} \leq \frac{y}{4} \iff 2|x| \leq y$.
M_2 ist der Bereich zwischen den Geraden $y = -2x$ und $y = 2x$ oberhalb der x-Achse (Geraden mit eingeschlossen).

c) $\sqrt{x^2+y^2} = x \iff (y = 0 \text{ und } x > 0)$
d.h. $M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ (die positive x-Achse)

d) M_4 ist der Einheitskreis

5. Aufgabe 6 Punkte

Wahr sind a), b) und f).