TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2006
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozenten: M. Scherfner · B. Wagner
Assistenten: M. Nafalska · K. Roegner
www.moses.tu-berlin.de/Mathematik/

Lösungen zur P+Ü-Klausur (Juli 2006), Rechenteil. Analysis I für Ingenieure

1. Aufgabe **(9 Punkte)**

(a) $f'(\theta) = 2\theta \cos\left(\frac{\theta}{1+\theta^2}\right) - \theta^2 \sin\left(\frac{\theta}{1+\theta^2}\right)\left(\frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2}\right)$

(b) **1. Möglichkeit:** $g'(x) = (\ln x^x)' = \left(\ln(e^{x\ln x})\right)' = e^{x\ln x}(\ln x + 1)\frac{1}{x^x} = \ln x + 1$

2. Möglichkeit: $g'(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1$

(c) $h'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}$

2. Aufgabe **(9 Punkte)**

(a) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\,dx &= x^2e^x - \int 2xe^x dx + const. = x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\,dx\right) + const. \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + const. = e^x(x^2-2x+2) + const.\end{aligned}$$

(b) $\int_4^5 \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x-3|\Big|_4^5 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

(c) **1. Möglichkeit:** Substitution:
$t := 3x^2 - 3, \quad \frac{dt}{dx} = 6x \Rightarrow dx = \frac{1}{6x}\,dt$
neue Grenzen: $t(\sqrt{2}) = 3, \quad t(\sqrt{e+1}) = 3(e+1) - 3 = 3e$

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{2x}{3x^2-3}dx &= \int_3^{3e} \frac{2x}{t}\frac{1}{6x}\,dt = \frac{1}{3}\int_3^{3e}\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\ln|t|\Big|_3^{3e} = \frac{1}{3}(\ln(3e) - \ln 3) \\ &= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3e}{3}\right) = \frac{1}{3}\ln e = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Logarithmische Ableitung:

Es gilt: $\int \frac{f'}{f}\, dx = \ln|f| + const.$ für f ohne Nullstellen

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{2x}{3x^2-3} dx \quad = \quad \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{3}\ln|x^2-1|\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} = \frac{1}{3}(\ln(e) - \ln(1)) = \frac{1}{3}$$

---

3. Möglichkeit: Partialbruchzerlegung

$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{2x}{3x^2-3} dx = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{x}{(x+1)(x-1)} dx$

$= \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}\right) dx$

$= \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right) dx$

$\frac{1}{3}\left(\ln|x+1| + \ln|x-1|\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}}$

$= \ln(\sqrt{e+1}+1) + \ln(\sqrt{e+1}-1) - \ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1)$

$\ldots = \frac{1}{3}$

---

3. Aufgabe **(12 Punkte)**

(a) Vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $f^{(0)}(x) = f(x) = (1+x)^{-3} = \frac{(-1)^0(0+2)!}{2}(1+x)^{-(0+3)}$

Induktionsschritt: z.z.:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k(k+2)!}{2}(1+x)^{-(k+3)} \Rightarrow f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k+3)!}{2}(1+x)^{-(k+4)}$$

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \overset{IV}{=} \left(\frac{(-1)^k(k+2)!}{2}(1+x)^{-(k+3)}\right)' \\ &= \frac{(-1)^k(k+2)!}{2}(-(k+3))(1+x)^{-(k+3)-1} = \frac{(-1)^{k+1}(k+3)!}{2}(1+x)^{-(k+4)} \end{aligned}$$

(b) $T_0^3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k(k+2)!}{2k!}x^k = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+2)!}{2k!}x^k$

(d) Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}(k+3)!}{2(k+1)!}x^{k+1}}{\frac{(-1)^k(k+2)!}{2k!}x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+3)!2k!}{2(k+1)!(k+2)!}|x| = \lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{k+3}{k+1}}_{\to 1}|x| < 1 \Longleftrightarrow |x| < 1$$

$\Longrightarrow$ Konvergenzradius $R = 1$

(e) Randpunkte: $1, -1$

1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+2)!}{2k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k (k+2)(k+1)}{2}}_{\not\to 0} \Longrightarrow \text{divergent}$$

-1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+2)!}{2k!} (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(k+2)(k+1)}{2}}_{\not\to 0} \Longrightarrow \text{divergent}$$

Das Intervall, auf dem die Reihe konvergiert, ist also $]-1, 1[$.

4. Aufgabe **(10 Punkte)**

(a) $f'(x) = -2xe^{(-x^2)}$
$\Longrightarrow f'(x) \geq 0 \;\forall x \leq 0,\; f'(x) \leq 0 \;\forall x \geq 0$
$\Longrightarrow f$ monoton wachsend auf $]-\infty, 0]$, f monoton fallend auf $[0, \infty[$.

(b) $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. Aufgrund der Monotonie muss bei $x = 0$ ein Maximum sein.

Das globale Maximum ist $(0, 1)$. Weil 0 die einzige Nullstelle von f' ist, gibt es keine weiteren lokalen Extrema.

(c) Das Supremum wird angenommen; es ist $f(0) = 1$.
Das Infimum ist wegen des Monotonieverhaltens von f und wegen $\lim_{x\to\infty} e^{(-x^2)} = 0 = \lim_{x\to-\infty} e^{(-x^2)}$ gleich 0. Weil $e^{(-x^2)} > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ ist, nimmt f kein Minimum an.

(d)

Abbildung 1: $f(x) = e^{(-x^2)}$