TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2006
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozenten: M. Scherfner · B. Wagner
Assistenten: M. Nafalska · K. Roegner
www.moses.tu-berlin.de/Mathematik/

Lösungen zur P+Ü-Klausur (Juli 2006), Verständnisteil. Analysis I für Ingenieure

1. Aufgabe **(6 Punkte)**

(a) M_1 ist die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die unterhalb und auf der Geraden $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)$ liegen.

(b) M_2 ist die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die außerhalb und auf dem Kreis mit Mittelpunkt $1 + i$ und Radius 1 liegen.

(c) M_3 ist der Schnitt dieser beiden Mengen, d.h. diejenigen z sind in M_3, die unterhalb bzw. auf der Geraden $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)$ und außerhalb bzw. auf dem Kreis mit Mittelpunkt $1+i$ und Radius 1 liegen.

2. Aufgabe **(10 Punkte)**

Da $x^2 + 4x$ und $x^3 + 3x^2 - 8$ Polynome sind, sind sie auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Die Funktion f ist also auf $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ stetig und differenzierbar. Der Punkt $x = 2$ muss separat untersucht werden.

Stetigkeit in $x = 2$: (z.z.: $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 2} f(x) = f(2)$)

$\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 2} x^3 + 3x^2 - 8 = 12$

$\lim\limits_{x\searrow 2} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 2} x^2 + 4x = 12$

$f(2) = 12$

Also ist f auch stetig in 2, also auf ganz $\mathbb{R}$.

Differenzierbarkeit in $x = 2$: (z.z.: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ existiert)

1. Möglichkeit: (mit Polynomdivision)

$$\lim_{x\nearrow 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\nearrow 2}\frac{(x^3+3x^2-8)-12}{x-2} = \lim_{x\nearrow 2}\frac{x^3+3x^2-20}{x-2} \overset{PD}{=} \lim_{x\nearrow 2} x^2+5x+10 = 24$$

$$\lim_{x\searrow 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\searrow 2}\frac{(x^2+4x)-12}{x-2} \overset{PD}{=} \lim_{x\searrow 2} x+6 = 8$$

Also ist f nicht differenzierbar in 2.

2. Möglichkeit: (mit links- und rechtsseitiger Ableitung)

$$\lim_{x\nearrow 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \overset{l.Abl.}{=} \lim_{x\nearrow 2} 3x^2+6x = 24$$

$$\lim_{x\searrow 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \overset{r.Abl.}{=} \lim_{x\searrow 2} 2x+4 = 8$$

Also ist f nicht differenzierbar in 2.

3. Aufgabe **(12 Punkte)**

(a) Wahr:
Die Funktion f ist stetig und damit integrierbar. Sei F eine Stammfunktion von f.
$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = 0 \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow F(b) = F(a) \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow F$ ist konstant
$\Rightarrow f(x) = F'(x) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(b) Falsch:
Sei $\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k=1}^\infty b_k = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Dann sind die Reihen $\sum_{k=1}^\infty a_k,\ \sum_{k=1}^\infty b_k$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, aber die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k b_k = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ ist divergent.

(c) Wahr:
f, g sind surjektiv, d.h. $f([0,1]) = [0,1]$ und $g([0,1]) = [0,1]$, also gilt für $f\circ g : [0,1]\to[0,1]$: $(f\circ g)([0,1]) = f(g([0,1])) = f([0,1]) = [0,1]$. Also ist auch $f\circ g$ surjektiv.

(d) Falsch:
Die Definition der Reihenkonvergenz lautet:
Eine Reihe heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert.

4. Aufgabe **(12 Punkte)**

(a) Es ist $f(-1) = -1 < 0$ und $f(0) = 1 > 0$ und f ist stetig. Nach dem ZWS muss es also eine reelle Nullstelle im Intervall $]-1, 0[$ geben. Wegen $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 > 0$ für $x \neq 0$ ist f streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Weil 0 die einzige Nullstelle von $f'(x)$ ist, ist f streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$. Also kann es nur diese eine reelle Nullstelle geben.

(b) Ja, denn nach dem MWS existiert ein $c \in]a, b[$ mit $\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{=0} = f'(c)$.