Februar-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen – Rechenteil

1. Aufgabe 6 Punkte

Aus der Bedingung $2 - \frac{x+2}{2-x} \geq 0$ erhält man

für $x < 2: \quad 4 - 2x - x - 2 \geq 0 \iff x \leq \frac{2}{3} \quad L_1 =]-\infty, \frac{2}{3}]$

für $x > 2: \quad 4 - 2x - x - 2 \leq 0 \iff x \geq \frac{2}{3} \quad L_2 =]2, \infty[$

Max. Definitionsbereich ist somit

$D = L_1 \cup L_2 =]-\infty, \frac{2}{3}] \cup]2, \infty[= \mathbb{R} \backslash]\frac{2}{3}, 2]$

2. Aufgabe 4 Punkte

Mindestens einer der Faktoren muss Null sein:

$$\frac{1}{i} + \bar{z} = 0 \iff \bar{z} = -\frac{1}{i} = i \iff z = -i.$$

$$z^2 - 2iz - 1 = 0 \iff z_{1,2} = i \pm \sqrt{i^2 + 1} = i.$$

Lösungen sind somit $z_0 = -i$ und $z_{1,2} = i$.

3. Aufgabe 6 Punkte

Die Ableitungen sind

$$f'(x) = x - \ln f(x)$$

$$f''(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$f'''(x) = \frac{-f''(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

Für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ erhält man damit

$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = -1.$

Das Taylorpolynom ist somit

$$T_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

4. Aufgabe 6 Punkte

Die Funktion $f(x) = x - \ln|x-1|$ mit $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

hat die Ableitungen $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1} \qquad f''(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

Es ist $f'(x) = 0$ nur für $x = 2$, und $f''(x) > 0$ für alle $x \in D$

Folglich liegt in $x = 2$ ein lokales Minimum vor.

Wegen $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ existieren keine globalen Extrema.

5. Aufgabe 9 Punkte

a) Mittels Partialbruchzerlegung erhält man

$$\int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right) dx = \left[\frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{4}\ln 3.$$

b) Partielle Integration mit $u = x,\ u' = 1,\ v' = \frac{1}{\cos^2 x},\ v = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ergibt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = x\cdot\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = [x\cdot\tan x + \ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

6. Aufgabe 9 Punkte

a) Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot(n+1)\cdot 3^{n+1}}{(-1)^{n+1}\cdot n\cdot 3^n}\right| = 3.$$

Randpunkte:

$x = -1$:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot(-3)^n}{n\cdot 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (harmonische Reihe).

$x = 5$:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 3^n}{n\cdot 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ ist konvergent (Leibniz-Kriterium)

b) Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1-i)^n\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot(1-n)^{n+1}}\right| = \left|\frac{2}{1-i}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Mittelpunkt der Reihe ist $-i$.

Für $z = i$ ist die Reihe divergent, denn $|i-(-i)| = |2i| = 2 > \sqrt{2}$.