**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN**
**Fakultät II - Mathematik**
Dozenten: Bärwolff, Behrndt, Böse, Penn-Karras
Assistenten: Ammar, Bauer, Dhamo

WiSe 2007/08
18.02.2008

# Musterlösung Februar-Klausur Verständnisteil WS 2007/08 Analysis I für Ingenieure

---

## 1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x \cos x - \sin x$.
Die Funktion $f$ ist stetig auf $[0, \pi]$, $f(0) = 1 > 0$ und $f(\pi) = -e^\pi < 0$.
Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in [0, \pi]$, so dass $f(\xi) = 0$, d.h. $e^\xi \cos \xi = \sin \xi$.

## 2. Aufgabe (6 Punkte)

Weil $x = 2$ eine doppelte Nullstelle und $x = 1$ eine einfache Nullstelle sind, ist

$$P(x) = a(x-2)^2(x-1), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Es gilt: $P'(x) = 2a(x-2)(x-1) + a(x-2)^2$ und $P''(x) = 2a(x-1) + 4a(x-2)$, d.h. $P'(2) = 0$ und $P''(2) = 2a$.
Um ein Maximum in $x = 2$ zu bekommen muss $a < 0$ sein.

## 3. Aufgabe (8 Punkte)

$$\text{a)} \quad \frac{x}{(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4}, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

$$\text{b)} \quad \frac{3x+1}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

$$\text{c)} \quad \frac{x^3-2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

und

$$\text{d)} \quad \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

## 4. Aufgabe (6 Punkte)

<u>Erste Variante</u>:

$$\int \frac{f'(x)f(x)}{2+f^2(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2+f^2)'(x)}{2+f^2(x)}\,dx = \ln(\sqrt{2+f^2(x)}) + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

<u>Zweite Variante</u>: Mit Hilfe der Substitution $t = f^2(x) \Rightarrow dt = 2f'(x)f(x)\,dx$,

$$\int \frac{f'(x)f(x)}{2+f^2(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2+t}\,dx = \ln(\sqrt{2+t}) + c = \ln(\sqrt{2+f^2(x)}) + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

<u>Dritte Variante</u>: Mit Hilfe der Substitution $t = 2 + f^2(x) \Rightarrow dt = 2f'(x)f(x)\,dx$,

$$\int \frac{f'(x)f(x)}{2+f^2(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}\,dx = \ln(\sqrt{t}) + c = \ln(\sqrt{2+f^2(x)}) + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

<u>Vierte Variante:</u>: Mit Hilfe der Substitution $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)\,dx$,

$$\int \frac{f'(x)f(x)}{2+f^2(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{2+t^2}\,dx = \ln(\sqrt{2+t^2}) + c = \ln(\sqrt{2+f^2(x)}) + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

## 5. Aufgabe (7 Punkte)

Erste Variante: Mit Hilfe des Mittelwertsatzes: Zu beweisen ist, dass $\frac{\ln(1+x)}{x} \geq \frac{1}{1+x}$ für alle $x > 0$ gilt. Sei $f : ]-1, +\infty[ \to \mathbb{R}, \ r \mapsto \ln(1+r)$ und $x > 0$. $f$ ist stetig auf $[0, x]$ und differenzierbar auf $]0, x[$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in ]0, x[$ so dass

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi), \ \text{d.h.} \ \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\xi} \geq \frac{1}{1+x}.$$

Zweite Variante: Sei $g : ]-1, +\infty[ \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$. Zu beweisen ist, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x > 0$ gilt.
Die Funktion $g$ ist differenzierbar auf $]-1, +\infty[$ und für alle $x \in [0, +\infty[$ gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0.$$

Daher ist $g$ monoton wachsend auf $[0, +\infty[$, d.h. $g(x) \geq g(0) = 0$ für alle $x \geq 0$.

## 6. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $T = \pi$. Die Funktion $f$ ist $T$-periodisch und

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$$

mit $\omega = 2 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi}$,
$a_0 = 2$, $a_k = \frac{1}{k^2}$, $k = 1, ..., 10$; $\ a_k = 0, \ k \geq 11$,
$b_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, ..., 10$ und $b_k = 0, \ k \geq 11$.
Daraus folgern wir:

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos(6x)\, dx = \int_0^{T} f(x) \cos(3 \times 2x)\, dx = \frac{\pi}{2} \times \frac{2}{\pi} \int_0^{T} f(x) \cos(3 \times 2x)\, dx = \frac{\pi}{2} \times a_3 = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{\pi}{18}.$$