TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Mathematik
Dozenten: Bärwolff, Behrndt, Böse, Penn-Karras
Assistenten: Ammar, Bauer, Dhamo

WS 2007/08
7.4.2008

Musterlösung April-Klausur Verständnisteil WS 2007/08
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

Die Nullstellen von p sind $1, -1, i$ und $-i$, also $p(x) = c(x-1)(x+1)(x-i)(x-i) = c(x^2-1)(x^2+1)$, mit $c \in \mathbb{R}$. Wegen $p(0) = 1$ folgt $-c = 1 \Leftrightarrow c = -1$, also $p(x) = -(x^2-1)(x^2+1)$.

2. Aufgabe (9 Punkte)

a) Falsch: Gegenbeispiel: $f(x) = x^3, x_0 = 0$. Es gilt $f'(0) = f''(0) = 0$, aber $f'''(0) \neq 0$, also ist x_0 kein Extremum (Satz über lokale Extremwerte) .

b) Falsch: Gegenbeispiel: $f(x) = -x^2$. $f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$, also ist $x_0 = 0$ ein Maximum von f auf $]-1, 1[$ (Satz über lokale Extremwerte) .

c) Falsch: Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (unbestimmt) divergent und beschränkt, da $|a_n| \leq 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Zunächst ist $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergent und es gilt $0 \leq \frac{1}{x^2+1+\sin(x)} \leq \frac{1}{x^2}$. Daher gilt nach dem Majorantenkriterium: $0 \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2+1+\sin(x)}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, also konvergent.

4. Aufgabe (8 Punkte)

Variante 1 (Mittelwertsatz): Es gilt $f(1) = f(2) = 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in]1, 2[$ mit $0 = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(\xi)$.

Variante 2 (Zwischenwertsatz): Die Ableitung $f'(x) = \ln(x) + \frac{x-2}{x}$ von f ist stetig und es gilt $f'(1) = -1$ und $f'(2) = \ln(2) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert dann ein $\xi \in]1, 2[$, so dass $0 = f'(\xi)$.

5. Aufgabe (8 Punkte)

a) $f(x) = 2\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 + \cos^2(x) = 1 + \frac{1}{2}\big(\cos(2x) + 1\big) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$. Wähle also

Variante 1 : $T = \pi$, $\omega = 2$, dann ist $a_0 = 3, a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_k = b_l = 0$ für alle $k \geq 2$, $l \geq 1$.

Variante 2 : $T = 2\pi$, $\omega = 1$, dann ist $a_0 = 3, a_2 = \frac{1}{2}$ und $a_1 = a_k = b_l = 0$ für alle $k \geq 3$, $l \geq 1$.

Dann ist $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ die Fourierreihe von f zur Periode T.

b) Sei $T = \pi$, $\omega = 2$, Dann ist $\int_0^\pi f(x)\sin(4x)\,dx = \frac{\pi}{2} b_2 \overset{a)}{=} 0$.