TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 08
Fakultät II - Mathematik 21.7.2008
Dozenten: Flad, Penn-Karras, Yserentant
Assistenten: Hartanto, Neitzel, Zeiser

Musterlösung Juli-Klausur Rechenteil SS 08
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Wir machen den Ansatz $\frac{x+3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$.

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner erhalten wir

$$\left.\begin{array}{rl} & Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1) = x+3 \\ \Leftrightarrow & (A+B)x^2 + (B+C)x + C = x+3 \end{array}\right\}.$$

Koeffizientenvergleich liefert $A = -B,\ B = 1-C,\ C = 3$ und damit $B = -2,\ A = 2$

2. Aufgabe (8 Punkte)

Es gilt

$$\frac{z^3}{2} + 1 = \frac{1 - 4\sqrt{2} + i}{i+1} \Leftrightarrow z^3 = -\frac{8\sqrt{2}}{i+1} = 8\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Also sind die Lösungen gegeben durch die Menge

$$\{z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi)} \mid k = 0, 1, 2\}.$$

3. Aufgabe (11 Punkte)

$$\textbf{a)} \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx \overset{\substack{x=t^2 \\ dx=2t\,dt}}{=} \int_0^{\pi} 2t\sin t\,dt \overset{\substack{u=2t \\ v'=\sin t}}{=} -2t\cos t\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\cos t\,dt$$

$$= -2t\cos t + 2\sin t\Big|_0^{\pi} = 2\pi$$

$$\textbf{b)} \int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{2x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_a^0 = \frac{1}{2}$$

c) <u>**1. Weg:**</u> $\displaystyle\int_1^e t^3\ln t\,dt \overset{\substack{u=\ln t \\ v'=t^3}}{=} \frac{t^4}{4}\ln t\Big|_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{4}\,dt = \frac{t^4}{4}\ln t\Big|_1^e - \frac{t^4}{16}\Big|_1^e = \frac{1}{16}(3e^4+1)$

<u>**2. Weg:**</u> $\displaystyle\int_1^e t^3\ln t\,dt \overset{\substack{x=\ln t \\ dt=e^x\,dx}}{=} \int_0^1 e^{3x}xe^x\,dx \overset{\substack{u=x \\ v'=e^{4x}}}{=} \frac{1}{4}xe^{4x}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 e^{4x}\,dx = \frac{1}{16}(3e^4+1)$

4. Aufgabe (7 Punkte)

<u>**1. Weg:**</u>

$f'(x) = -e^{\cos x}\sin x,\quad f''(x) = e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x)$. Dann ist

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Einsetzen in die zweite Ableitung liefert

$$f''(k\pi) = (-1)^{k+1}e^{(-1)^k}\begin{cases} < 0, & k \text{ gerade} \\ > 0, & k \text{ ungerade}\end{cases}.$$

Also hat f $\begin{cases} \text{lokale Maxima bei } \big(2k\pi \,|\, e\big) & , k \in \mathbb{Z} \\ \text{lokale Minima bei } \big(2(k+1)\pi \,|\, \frac{1}{e}\big) & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

2. Weg:

Da die Funktion $x \mapsto e^x$ monoton wachsend ist, hat f seine Extrema genau da, wo der Kosinus seine Extrema hat.

Also: f hat $\begin{cases} \text{lokale Maxima bei } \big(2k\pi \,|\, e\big) & , k \in \mathbb{Z} \\ \text{lokale Minima bei } \big(2(k+1)\pi \,|\, \frac{1}{e}\big) & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

5. Aufgabe

(8 Punkte)

a) $f'''(x) = f'^2(x) + f(x)f''(x) + 2,\ f^{(4)}(x) = 3f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)$

$f''(1) = 0, \quad f'''(1) = 2, \quad f^{(4)}(1) = 6$

$$\begin{aligned} T_4(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \tfrac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \tfrac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 + \tfrac{f^{(4)}(1)}{24}(x-1)^4 \\ &= 3 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 + \tfrac{1}{4}(x-1)^4. \end{aligned}$$

b) Nein, denn $f'(1) = f''(1) = 0,\ f'''(1) \neq 0,$ und 3 ist ungerade.