TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2008
Fakultät II - Mathematik 21.7.2008
Dozenten: Flad, Penn-Karras, Yserentant
Assistenten: Hartanto, Neitzel, Wachsmuth, Zeiser

Musterlösung Juli-Klausur Verständnisteil SS 2008
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

b), c) und f) sind wahr,
a), d) und e) sind falsch.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Komplexe Polynome dritten Grades haben nach dem Fundamentalsatz der Algebra die Vielfachheiten eingerechnet genau drei Nullstellen. Da p ein komplexes Polynom mit reellen Koeffizienten ist, treten die Nullstellen immer in komplex konjugierten Paaren auf. Neben der angegebenen Nullstelle $z_1 = i$ ist somit auch $z_2 = \bar{z}_1 = -i$ eine Nullstelle. Da genau eine weitere Nullstelle existiert, muss diese reell sein, es existiert also genau eine reelle Nullstelle.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Die Funktion f ist ein Polynom sechsten Grades und wird durch eine Taylorentwicklung zehnten Grades exakt wiedergegeben. Daher gilt für das Taylorpolynom T_{10}

$$T_{10}(x) = f(x) = (x-1)^6 + 3.$$

Für das Restglied gilt daher

$$R_{10}(x) = f(x) - T_{10}(x) = 0, \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Somit ist die kleinste obere Schranke für den Betrag des Restgliedes 0, das heisst es gilt

$$|R_{10}(x)| \leq 0.$$

4. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Da f nach Voraussetzung stetig ist hat f eine Stammfunktion.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt für jede Stammfunktion F von f

$$F(x) - F(-x) = \int_{-x}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

nach Voraussetzung. Umgestellt ergibt dies

$$F(x) = F(-x)$$

und damit die Behauptung.

(c) Nach Definition des uneigentlichen Integrals gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\, \mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\, \mathrm{d}x,$$

und beide Grenzwerte müssen existieren, damit das uneigentliche Integral existiert. Das ist z.B. für die stetige Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x.$$

nicht erfüllt: Es gilt für beliebige $R > 0$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, \mathrm{d}x = [\frac{1}{2}x^2]_{-R}^{R} = 0,$$

somit erfüllt f alle Voraussetzungen. Für das uneigentliche Integral erhalten wir aber

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}a^2 + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}b^2.\end{aligned}$$

Die beiden Grenzwerte $\lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}a^2$ und $\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}b^2$ existieren offensichtlich nicht. Daher existiert auch das uneigentliche Integral nicht.

5. Aufgabe (7 Punkte)

a) Aus $x^2 \geq 0$ und $1+x^2 > 0$ folgt $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$. Mit $f(0) = 0$ erhalten wir $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$. Weiter folgt $f(x) < 1$ aus $x^2 < 1+x^2$. Mit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ gilt $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$.

b) Es gilt

$$g(x) = \begin{cases} e & x > 0,\\ 1 & x = 0,\\ \frac{1}{e} & x < 0.\end{cases}$$

Mit $\frac{1}{e} < 1 < e$ folgt $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = \frac{1}{e}$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = e$.

6. Aufgabe (6 Punkte)

- Der Integrand ist immer positiv und daher ist F streng monoton steigend. Damit folgt, dass F seine Extrema am Rand annimmt also an den Stellen

$$x = 0, \quad \text{und} \quad x = 2\pi.$$

- **Alternativ** (ausführlicher) Der Integrand $1+\sin^4(t)$ ist stetig auf $I := [0, 2\pi]$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $F'(x) = 1+\sin^4(x)$. Kandidaten für Extremalstellen sind die inneren Punkte von I mit $F'(x) = 0$ und die Randpunkte des Intervalls $[0, 2\pi]$. Offensichtlich gilt $F'(x) > 0$ für alle $x \in I$, somit gibt es im Inneren des Intervalls keine Extrema, und die Funktion F ist monoton wachsend. Daher wird das globale (und somit lokale) Minimum von F am linken Rand $x = 0$ angenommen, and das globale (und somit lokale) Maximum am rechten Rand $x = 2\pi$.