TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 08
Fakultät II - Mathematik 6.10.2008
Dozenten: Flad, Penn-Karras, Yserentant
Assistenten: Hartanto, Neitzel, Zeiser

Musterlösung Oktober-Klausur Rechenteil SS 08
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

Wir formen um:

$$
\begin{aligned}
& (z+1+i)(z-3-i) = \frac{-40i}{1+3i} \\
\Leftrightarrow\quad & z^2 - 2z - 4i - 2 = \frac{-40i(1-3i)}{10} \\
\Leftrightarrow\quad & z^2 - 2z + 10 = 0
\end{aligned}
$$

Mit der p-q-Formel erhält man $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-9}$, d.h. $z_{1,2} = 1 \pm 3i$.

2. Aufgabe (6 Punkte)

a)

$$\frac{3n^2 + \arctan n}{(n+1)(2n-1)} = \frac{3n^2 + \arctan n}{2n^2 + n - 1} = \frac{3 + \frac{\arctan n}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

arctan ist eine nach oben durch $\frac{\pi}{2}$ beschränkte Funktion. Deshalb gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arctan n}{n^2} = 0$.
Also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + \arctan n}{(n+1)(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{\arctan n}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2}$$

b) 1. Weg: Da sowohl der Zähler als auch der Nenner für $x \to 0$ gegen 0 streben, können wir die Regel von L'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x + 2\tan^3 x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2 + 6\tan^2 x)(1 + \tan^2 x)}{2} = 1.$$

2.Weg: Wegen der Stetigkeit der Quadratfunktion gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}\right)^2.$$

Da sowohl der Zähler als auch der Nenner für $x \to 0$ gegen 0 streben, können wir die Regel von L'Hospital anwenden: $\boxed{1\text{ P}}$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}\right)^2 \overset{L'H}{=} \left(\lim_{x\to 0} \frac{1 + \tan^2 x}{1}\right)^2 = 1.$$

3. Aufgabe (9 Punkte)

a)

IA: für $k = 0$ klar. Alternativ für $k = 1$: $(x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x)e^x = f'(x)$.

IV: Es gelte $f^{(k)}(x) = \big(x^2 + 2kx + k(k-1)\big)e^x$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

IB: z.Z.: $f^{(k+1)}(x) = \big(x^2 + 2(k+1)x + k(k+1)\big)e^x$.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x) \overset{IV}{=} \Big(\big(x^2 + 2kx + k(k-1)\big)e^x\Big)' \\
&= \big(x^2 + 2kx + k(k-1)\big)e^x + \big(2x + 2k\big)e^x \\
&= \big(x^2 + (2k+2)x + k(k-1+2)\big)e^x \\
&= \big(x^2 + 2(k+1)x + k(k+1)\big)e^x
\end{aligned}
$$

b) Nach Teil a) ist

$$f^{(k)}(x_0 = \tfrac{1}{2}) = \big(\tfrac{1}{4} + k + k(k-1)\big)e^{1/2} = (\tfrac{1}{4} + k^2)\sqrt{e}.$$

Also ergibt sich für das n-te Taylorpolynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\frac{1}{4} + k^2)\sqrt{e}}{k!}\,\big(x - \tfrac{1}{2}\big)^k.$$

4. Aufgabe (9 Punkte)

a) Wir machen zunächst eine Partialbruchzerlegung:

$$\frac{6}{x^2 - 2x} = \frac{6}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

Mit der Zuhaltemethode (alle Nullstellen treten einfach auf) erhalten wir $A = -3$ und $B = 3$. Also

$$\int \frac{6}{x^2 - 2x}\,dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx - \int \frac{3}{x}\,dx = 3\big(\ln|x-2| - \ln|x|\big) + c = 3\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + c,\ c \in \mathbb{R}$$

b) Mit partieller Integration ($u = \ln x,\ v' = \frac{1}{x^2}$) erhält man

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{x}\Big|_1^e = -\frac{(\ln x + 1)}{x}\Big|_1^e = 1 - \frac{2}{e}.$$

c) Mit der Substitution $\sin x = t,\ dt = \cos x\,dx$ erhält man

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\cos x\,dx = \int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

5. Aufgabe (9 Punkte)

a) Bestimme zunächst die Ableitung von f:

$$f'(x) = 2x\cos(x^2 + \frac{\pi}{4}).$$

Diese verschwindet genau dann wenn

$$x = 0 \quad \text{oder wenn} \quad x^2 + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x^2 = (4k+1)\frac{\pi}{4}$$

ist, wobei wegen $x^2 \geq 0$ $k \geq 0$ sein muß. Prüfe, für welche k die Lösung in $[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$ liegt.

Für $k = 0$ ist $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \in [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$ und

für $k = 1$ ist $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{\pi} \notin [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$.

Also sind die einzigen Extrempunktkandidaten $x_0 = 0,\ x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Überprüfe f' auf VZW:

- für $x < x_0 = 0$ nahe bei x_0 ist $f'(x) < 0$ und für $x > x_0$ ist $f'(x) > 0$.
  $\rightsquigarrow$ lokales Minimum bei $x_0 = 0$ mit $f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- für $x < x_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ nahe bei x_1 ist $f'(x) > 0$ und für $x > x_1$ ist $f'(x) < 0$.
  $\rightsquigarrow$ lokales Maximum bei $x_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ mit $f(x_1) = 1$.
- für $x < x_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ nahe bei x_1 ist $f'(x) > 0$ und für $x > x_2$ ist $f'(x) < 0$.
  $\rightsquigarrow$ lokales Maximum bei $x_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ mit $f(x_2) = 1$.

Untersuche noch die Intervallgrenzen: $f(x_{3,4} = \pm\sqrt{\pi}) = \sin(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Also liegen bei $x_{3,4}$ globale Minima und bei $x_{1,2}$ globale Maxima.

b) Da bei $x = 0$ ein lokales Minimum und bei $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ein lokales Maximum von f liegt, und f' zwischen diesen beiden Punkten keine weitere Nullstelle hat, ist für alle $a \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ f auf $[0, a]$ streng monoton wachsend und damit umkehrbar. Für $a > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gilt dies nicht mehr. Also ist $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.