TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2008
Fakultät II - Mathematik 6.10.2008
Dozenten: Flad, Penn-Karras, Yserentant
Assistenten: Hartanto, Neitzel, Wachsmuth, Zeiser

Musterlösung Oktober-Klausur Verständnisteil SS 2008 Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Es gilt $p(-(2-i)) = p(2-i) = 0$ da p gerade ist und $z_1 = 2-i$ eine Nullstelle ist (1 Pkt). Also ist auch $z_2 = -2+i$ eine Nullstelle (1 Pkt). Da p nur reelle Koeffizienten hat ist jede komplex konjugierte Nullstelle ebenfalls eine Nullstelle (1 Pkt). Das heißt $z_3 = 2+i$ und $z_4 = -2-i$ sind weitere Nullstellen (1 Pkt). Da $p \neq 0$ gilt und p mindestens vier Nullstellen besitzt muss p nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens vierten Grades sein (2 Pkte).

2. Aufgabe (8 Punkte)

Die Funktion f ist stetig (1 Pkt) und es gilt $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 + e^3 - 2 > 0$ (2 Pkte). Nach dem Zwischenwertsatz (1 Pkt) für stetige Funktionen existiert also ein $\xi \in (0,1)$ mit $f(\xi) = 0$ (1 Pkt). Es existiert also mindestens eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ (1Pkt). Aus der strengen Monotonie $f'(x) = 1 + 3e^{3x} > 0$ von f (1 Pkt) folgt die Eindeutigkeit der Nullstelle. (1 Pkt)

3. Aufgabe (6 Punkte)

a) Die Nullstellen des Nenners sind gegeben durch die einfachen reellen Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. (1P)

Daher lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+3x+5}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

(1P)

b) Wir erhalten die drei einfachen Nullstellen des Nenners $x = 0$, $x = i$, $x = -i$. (1P)

Der Ansatz für die relle Partialbruchzerlegung lautet also mit $(x-i)(x+i) = x^2+1$:

$$\frac{x^2+3x+5}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

(1P)

c) Die Nullstellen des Nenners sind gegeben durch die einfache Nullstelle $x = 0$ und die doppelte Nullstelle $x = -1$. (1P)

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet daher:

$$\frac{x^2+3x+5}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

(1P)

4. Aufgabe

(8 Punkte)

Die Taylorentwicklung zweiten Grades von F an x_0 ist gegeben durch

$$P(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2. \quad \text{(1 Pkt)}$$

Durch die Integrationsregeln gilt $F(x_0) = 4 + \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = 4$ (1 Pkt). Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (1 Pkt) liefert $F'(x) = f(x), \quad F''(x) = f'(x)$ (1 Pkt). Die Taylorentwicklung von f im Punkt x_0 ergibt

$$T(x) = \underbrace{3}_{=f(x_0)} + \underbrace{2}_{=f'(x_0)}(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2. \quad \text{(2 Pkt)}$$

und damit also $F'(x_0) = f(x_0) = 3, \quad F''(x_0) = f'(x_0) = 2$ (1 Pkt). Insgesamt lautet damit die Taylorentwicklung von F

$$P(x) = 4 + 3(x - x_0) + (x - x_0)^2. \quad \text{(1 Pkt)}$$

5. Aufgabe

(8 Punkte)

f ist stetig, da f nach Voraussetzung differenzierbar ist (1 Pkt). Damit ist g in $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ eine Komposition stetiger Funktionen (1 Pkt), wobei der Nenner in diesem Bereich nie Null wird (1 Pkt). Also ist g in $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ stetig (1 Pkt).

Die Stetigkeit von g im Punkt x_0 wird nun getrennt bewiesen. Aus der Definition des Grenzwertes folgt

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad \text{(1 Pkt)}$$

Der letzte Grenzwert existiert, da f differenzierbar ist (1 Pkt) und ergibt $f'(x_0)$ nach Definition der Ableitung (1 Pkt). Damit folgt aber

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = f'(x_0) = g(x_0) \quad \text{(1 Pkt)}$$

also die Stetigkeit von g am Punkt x_0. (1 Pkt)
Damit ist gezeigt, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

6. Aufgabe

(4 Punkte)

(a) ist falsch.
(b) ist richtig.
(c) ist richtig.
(d) ist richtig.

Begründung:
(a) Beispiel $a_n = 1/n$, $b_n = n$.
(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $\bar{a}$. Dann gibt es nach Definition der Konvergenz ein N, so dass

$$|a_n - \bar{a}| \leq 1, \quad n \geq N.$$

Also gilt $\bar{a} - 1 \leq a_n \leq \bar{a} + 1$ für alle $n \geq N$. Insgesamt ist

$$\min(a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, \bar{a} - 1) \leq a_n \leq \max(a_1, \ldots, a_{N-1}, \bar{a} + 1)$$

für alle n.
(c) Gilt nach Satz 95 in der Vorlesung.
(d) Gilt nach Abschnitt “Rechenregeln für das Integral” in Abschnitt 8.1 des Skriptes.