Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 08/09
Bärwolff, Böse, Penn-Karras, Tröltzsch 18.12.2008

Dezember – Probeklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen

Rechenteil

1. Aufgabe 6 Punkte

Die Ungleichung ist für $x = 2$ nicht definiert!
1) Für $x \leq -1$ gilt: $\frac{|x+1|}{|x-2|} \leq 2 \iff -(x+1) \leq -2(x-2) \iff x \leq 5$
$L_1 =]-\infty, -1]$
2) Für $-1 < x < 2$ gilt: $\frac{|x+1|}{|x-2|} \leq 2 \iff x+1 \leq -2(x-2) \iff 3x \leq 3 \iff x \leq 1$
$L_2 =]-1, 1]$
3) Für $x > 2$ gilt: $\frac{|x+1|}{|x-2|} \leq 2 \iff x+1 \leq 2(x-2) \iff 5 \leq x$
$L_3 = [5, \infty[$
Als Lösungsmenge erhält man: $\mathbb{L} = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty, 1] \cup [5, \infty[$.

2. Aufgabe 3 Punkte

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n^3-3n+1}{n^2} - 3\cos(n)\right) \\
&= \frac{n^3-3n+1}{n^3+n^2} - \frac{3\cos(n)}{n+1} \\
&= \frac{n^3(1-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{n^3(1+\frac{1}{n})} - \frac{3\cos(n)}{n+1} = \frac{1-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}} - \frac{3\cos(n)}{n+1}.
\end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}} = 1$. Wegen $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ gilt außerdem $\frac{-3}{n+1} \leq \frac{3\cos(n)}{n+1} \leq \frac{3}{n+1}$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pm 3\cos(n)}{n+1} = 0$ folgt nach dem Dreifolgensatz: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\cos(n)}{n+1} = 0$.
Folglich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}} - \lim_{n\to\infty} \frac{3\cos(n)}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

3. Aufgabe 6 Punkte

Die Funktion f ist zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Kandidaten für Extremstellen sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$. Die Ableitungen sind gegeben durch $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2}$ und $f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$.
Es ist $f'(x) = 0$ nur für $x = \pm 1$ und $f''(-1) < 0$, $f''(1) > 0$.
Folglich hat die Funktion f nach dem Satz über lokale Extrema in $x = -1$ ein lokales Maximum und in $x = 1$ ein lokales Minimum.
Wegen $\frac{-\pi}{2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, also gibt es keine globalen Extrema.

4. Aufgabe 5 Punkte

Auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist f differenzierbar als Produkt und Komposition differenzierbarer Funktionen mit Ableitung $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ ($x \neq 0$!). Es ist noch die Differenzierbarkeit in $x = 0$ zu gewährleisten.
Wir bestimmen zunächst a so, dass f stetig ist in $x = 0$. Das gilt genau dann, wenn $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2\sin(\frac{1}{x}) = 0$, da $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ und $-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$. Mit $f(0) = a$ folgt: f ist stetig in $x = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.
Setze nun $a = 0$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0\,.$$

Daher ist für $a = 0$ f auch differenzierbar in $x = 0$ mit $f'(0) = 0$, also insgesamt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

Bemerkung: f ist nicht stetig differenzierbar in $x = 0$, d.h $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) \neq f'(0) = 0$, denn $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x})$ existiert nicht, folglich auch nicht $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

<u>Verständnisteil</u>

5. Aufgabe 4 Punkte

Die Funktion f ist ein Polynom sechsten Grades und wird durch eine Taylorentwicklung zehnten Grades exakt wiedergegeben. Daher gilt für das Taylorpolynom $T_{10}[f, x_0 = 1]$

$$T_{10}[f, x_0 = 1](x) = 3 + (x - 1)^6.$$

6. Aufgabe 6 Punkte

a) $\frac{x}{(x+1)(x^2-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-\sqrt{2}} + \frac{C}{x+\sqrt{2}}$ (einfache reelle Nullstellen $x_0 = -1$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$).
b) $\frac{2x-1}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$ (doppelte reelle Nullstelle $x_0 = 2$).
c) $\frac{x^3-x^2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ (einfache reelle Nullstellen $x_0 = 1$ und $x_1 = -1$ und einfache konjugiert komplexe Nullstellen $x_2 = -i$ und $x_3 = i$).
Hinweis: wegen $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ ist $A = 0$.

7. Aufgabe 6 Punkte

$w = -z_0^4 = -(1 - i)^4 = -(\sqrt{2})^4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}\cdot 4} = 4.$
Wegen $z_0^4 = (-z_0)^4$ ist auch $z_1 = -z_0$ eine Lösung;
und da das Polynom $p(z) = z^4 + 4$ nur reelle Koeffizienten hat, sind auch $\bar{z}_0$ und $\bar{z}_1$ Lösungen. Lösungen sind also $1 - i$, $-1 + i$, $1 + i$, $-1 - i$.

8. Aufgabe 4 Punkte

a) ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist $f : x \mapsto e^{-x}$.

b) ist wahr: f ist gerade $\Longrightarrow f(-x) = f(x) \Longrightarrow -f'(-x) = f'(x) \Longrightarrow f'$ ist ungerade.

c) ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist $(a_n) = (n)$ und $(b_n) = (-n)$

d) ist wahr (Beweis im Skript)