TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2008/09
Fakultät II - Mathematik 16.02.2009
Dozenten: Bärwolff/Böse/Penn-Karras/Tröltzsch
Assistenten: Ammar, Dhamo, Neitzel

Musterlösung Februar-Klausur Rechenteil WS 2008/09
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

$$z_1 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2009} = \left(1 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2009} = 1 \cdot e^{i\frac{2009\pi}{4}} = \cos\left(\frac{2009\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2009\pi}{4}\right) = \cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4}) = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$z_2 = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2. Aufgabe (10 Punkte)

a) $\displaystyle\int \frac{5x-1}{(x+1)(x^2-1)}\,dx = \int \frac{5x-1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx.$

Wir machen den Ansatz:

$$\frac{5x-1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1},$$

wobei $A, B, C \in \mathbb{R}$ zu bestimmen sind. Multiplikation mit $(x+1)^2(x-1)$ und Koeffizientenvergleich/Zuhaltemethode ergibt $A = -1, B = 3, C = 1$. Die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{5x-1}{(x+1)^2(x-1)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

Schliesslich erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-1}{(x+1)(x^2-1)}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1}\right) dx \\ &= -\ln(|x+1|) - \frac{3}{x+1} + \ln(|x-1|) + c = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) - \frac{3}{x+1} + c.\end{aligned}$$

b) Variante 1: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx \overset{z=x^2}{=} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin z\,dz = -\frac{1}{2}\cos(z)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(\cos(\pi) - \cos(0)) = 1.$

Variante 2: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} -\frac{1}{2}(\cos(x^2))'\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big|_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2}(\cos(\pi) - \cos(0)) = 1.$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^{a} \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{1-\frac{5}{2}}\frac{1}{x^{\frac{5}{2}-1}}\Big|_1^{a} = \frac{1}{1-\frac{5}{2}}\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{a^{\frac{5}{2}-1}} - 1\right) = \frac{-1}{1-\frac{5}{2}} = \frac{2}{3}.$

3. Aufgabe (7 Punkte)

Variante 1: Der Term im Betrag wechselt bei $x_1 = 1$ das Vorzeichen. Deswegen unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $x < 1$: Die Ungleichung $-x+1 \le 2x-1$ ist äquivalent zu $-3x \le -2$. Die Lösungsmenge davon ist $L_1 = [\frac{2}{3}, +\infty[\cap]-\infty, 1[= [\frac{2}{3}, 1[$.
2. Fall: $x \ge 1$: Die Ungleichung $x-1 \le 2x-1$ ist äquivalent zu $x \ge 0$. Die Lösungsmenge davon ist $L_2 = [0, +\infty[\cap [1, +\infty[= [1, +\infty[$.

Die Gesamtlösungsmenge lautet $L = L_1 \cup L_2 = [\frac{2}{3}, +\infty[$.
Variante 2: Die Ungleichung ist auf $[\frac{1}{2}, +\infty[$ definiert und dort äquivalent zu $x^2-2x+1 \le 4x^2-4x+1$, also auch zu $3x^2 - 2x \ge 0$. Die Lösungsmenge ist $L = [\frac{1}{2}, +\infty[\cap (]-\infty, 0] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[) = [\frac{2}{3}, +\infty[$.

4. Aufgabe (8 Punkte)

a) f ist auf $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ definiert, da $2x+1 \ge 0$ erfüllt sein muss. Damit ist $D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty[$.

b) f ist als Komposition differenzierbarer Funktionen zweimal differenzierbar auf $]-\frac{1}{2}, +\infty[$. Es gilt $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ und $f''(x) = -\frac{1}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}$, und somit $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = -1$. Das Taylorpolynom 2. Grades von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ lautet dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 = 1 + x - x^2.$$

c) Da f sogar dreimal differenzierbar ist auf $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ mit Ableitung $f^{(3)}(x) = \frac{3}{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}$, gilt für das Restglied

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 = \frac{1}{2(2\xi+1)^{\frac{5}{2}}}(x-x_0)^3\,,$$

wobei ξ zwischen $x_0 = 0$ und x liegt.

5. Aufgabe (7 Punkte)

Variante 1: Eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit von f in $x = 0$ ist die Stetigkeit von f in diesem Punkt, d.h. wenn $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = c$. Nach der Regel von Bernoulli-L'Hospital gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$. Also ist f in $x = 0$ stetig genau dann, wenn $c = 1$. Für $c = 1$ gilt dann

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} \overset{\text{L'H,}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{2x} \overset{\text{L'H,}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0\,.$$

Demnach ist $f'(0) = 0$ und für $x \ne 0$ ist die Funktion als Quotient differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit Ableitung $f'(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$. Zusammenfassend:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}\,, & x \ne 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Variante 2: Nach der Regel von Bernoulli-L'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - c}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - cx}{x^2} \overset{\text{L'H,}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-c}{2x}\,,$$

wobei der letzte Grenzwert genau dann existiert, wenn $c = 1$. Für $c = 1$ gilt dann $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin(x)}{2} = 0$, also $f'(0) = 0$. Für $x \ne 0$ ist die Funktion als Quotient differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit Ableitung $f'(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$. Zusammenfassend:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}\,, & x \ne 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$