TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2008/09
Fakultät II - Mathematik 16.02.2009
Dozenten: Bärwolff/Böse/Penn-Karras/Tröltzsch
Assistenten: Ammar, Dhamo, Neitzel

Musterlösung Februar-Klausur Verständnisteil WS 2008/09
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (9 Punkte)

a) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}.$$

Daraus folgt:

$f'(0) = f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$ für alle $x \in]-\infty, -1[\cup]0,1[$ und $f'(x) < 0$ für $x \in]-1,0[\cup]1,+\infty[$.

Daher ist die Funktion f auf $]-\infty,-1] \cup [0,1]$ (streng) monoton wachsend und auf $]-1,0] \cup [1,+\infty[$ (streng) monoton fallend.
b) Die Kandidaten für lokale Extremstellen sind $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$.
Variante 1: Aus a) folgt, dass f an der Stelle x_2 ein lokales Minimum und an den Stellen x_1 und x_3 ein lokales Maximum besitzt.
Da

$$f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x) < f(1) = f(-1)$$

sind die lokalen Extremstellen auch globale Extremstellen.
Variante 2: f ist sogar auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f''(x) = (2-10x^2+4x^4)e^{-x^2}$, d.h $f''(0) = 2 > 0$, $f''(-1) = f''(1) = -4e^{-1} < 0$.
Daraus folgt, dass f an der Stelle x_2 ein lokales Minimum und an den Stellen x_1 und x_3 ein lokales Maximum besitzt.
Da

$$f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x) < f(1) = f(-1)$$

sind die lokalen Extremstellen auch globale Extremstellen.

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) P ist ein Polynom 5.Grades und hat genau 5 Nullstellen in $\mathbb{C}$. Da die komplexen Nullstellen eines reellen Polynoms in kongugiert-komplexen Paaren auftreten, ist die Anzahl der reellen Nullstellen ungerade. Daher hat P mindestens eine reelle Nullstelle.
P hat mit i auch $-i$ als doppelte Nullstelle und eine einfache reelle Nullstelle. Damit gibt es drei verschiedene Nullstellen.
b) Aus a) folgt, dass $P(x) = a(x-1)(x-i)^2(x+i)^2 = a(x-1)((x-i)(x+i))^2 = a(x-1)(x^2+1)^2$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Variante 1: Wäre P ungerade, dann müsste $P(0) = 0$ gelten. Jedoch ist $P(0) = -a \neq 0$, also ist P nicht ungerade.
Variante 2: Wäre P ungerade, dann müsste $P(-1) = -P(1) = 0$ gelten. Jedoch ist $P(-1) \neq 0$, also ist P nicht ungerade.
Variante 3: Wäre P ungerade, dann müsste $P(-x) = -P(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Jedoch ist $P(-x) = a(-x-1)(x^2+1)^2 \neq P(x)$, also ist P nicht ungerade.

3. Aufgabe (8 Punkte)

a) Es gilt:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n\pi}} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\pi}{2}+2n\pi}} = \lim_{n\to+\infty} z_n.$$

b) Es ist

$$f(x_n) = f\Big(\frac{1}{\sqrt{1+n\pi}}\Big) = \frac{1}{\sin(1+n\pi-1)+2} = \frac{1}{\sin(n\pi)+2} = \frac{1}{2}$$

und

$$f(z_n) = f\Big(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\Big) = \frac{1}{\sin(1+\frac{\pi}{2}+2n\pi-1)+2} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2})+2} = \frac{1}{3}.$$

Daher, ist

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \frac{1}{2} \text{ und } \lim_{n\to+\infty} f(z_n) = \frac{1}{3}.$$

c) Die Folgen (x_n) und (z_n) konvergieren beide gegen 0, aber $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(z_n)$. Daher ist f im Punkt $x = 0$ unstetig.

d) Die Funktion f ist in $x = 0$ nicht stetig und daher auch nicht differenzierbar.

4. Aufgabe (8 Punkte)

a) Falsch : Gegenbeispiel: $f : x \mapsto \sin x$.

b) Falsch : Gegenbeispiel: $(a_n) = (2n)$ und $(b_n) = (-n)$. Es gilt: $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ aber $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

c) Wahr : Die Funktion $f : x \mapsto \cos x - x$ ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ stetig und es gilt:

$$f(0) = 1 > 0 \text{ und } f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert $\xi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ so dass $f(\xi) = 0$ d.h. $\cos\xi = \xi$.

5. Aufgabe (7 Punkte)

Die Funktion f ist ein Polynom 9. Grades und wird durch ihr Taylorpolynom 9. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{3}{2}$ exakt wieder gegeben. Aus dieser Taylorentwicklung lesen wir ab:

$$f(\frac{3}{2}) = 0,\quad f'(\frac{3}{2}) = 1,\quad \frac{f^{(5)}(\frac{3}{2})}{5!} = \frac{1}{5} \text{ d.h } f^{(5)}(\frac{3}{2}) = 24 \text{ und } f^{(7)}(\frac{3}{2}) = 0.$$