Analysis-I-Klausur Februar 2010 – Lösungen zum Rechenteil

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Induktionsanfang $n = 0$: LS$= 0$, RS$= 1 - \frac{3}{3} = 0$

Induktionsvoraussetzung: Für ein n gilt $\sum_{k=0}^{n} \frac{4k}{3^{k+1}} \;=\; 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}}$

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{4k}{3^{k+1}} \;=\; 1 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n+2}}$

Induktionsschluss: $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{4k}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{4k}{3^{k+1}} + \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} \overset{\text{(IV)}}{=} 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} + \frac{4(n+1)}{3^{n+2}}$

$= 1 - \frac{3(2n+3)-4(n+1)}{3^{n+2}} = 1 - \frac{2n+5}{3^{n+2}} = 1 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n+2}}$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

$f'(x) = -\frac{2}{3} + \frac{2x}{x^2+2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x^2+2) + 6x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

$f''(x) = \frac{2(x^2+2)-2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$

$f''(1) = \frac{2}{3^2} > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum in $x_1 = 1$

$f''(2) = \frac{-4}{6^2} < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum in $x_2 = 2$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Nullstelle des Nenners $x_1 = 1$ erraten

Polynomdivision: $x^3 + x^2 + 3x - 5 = (x-1)\cdot(x^2+2x+5)$

weitere Nullstellen $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

Ansatz zur reellen PBZ: $\frac{8}{x^3+x^2+3x-5} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$

Koeffizientenvergleich: $8 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x-1)$

$\Leftrightarrow 8 = (A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (5A-C) \Rightarrow A+B = 0,\ 2A-B+C = 0,\ 5A-C = 8$

Berechnung der Koeffizienten: $A = 1,\ B = -1,\ C = -3$

Ergebnis: $\frac{8}{x^3+x^2+3x-5} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x-3}{x^2+2x+5}$

Analysis-I-Klausur Februar 2010 – Lösungen zum Rechenteil

Aufgabe 4 (8 Punkte)

$f'(x) = \sin(1-x) - 2x$, $f''(x) = -\cos(1-x) - 2$, $f'''(x) = -\sin(1-x)$.

$f(1) = 0$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = -3$

$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = -2(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$.

$f(\frac{3}{2}) \approx T_2(\frac{3}{2}) = -2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{11}{8} = -1,325$.

$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}(x-1)^3 = \frac{-\sin(1-\xi)}{6}(x-1)^3$ mit $1 < \xi < x$

$$\Rightarrow |R_2(\tfrac{3}{2})| = \frac{\overbrace{|\sin(1-\xi)|}^{\leq 1}}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48}.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

a) Substitution $t = x^2 + 16, dt = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$ ergibt

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int_{16}^{25} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{t}\Big|_{16}^{25} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$$

b) partielle Integration mit $u' = e^{-x}$, $u = -e^{-x}$, $v = x$, $v' = 1$ ergibt

$$\int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x\,e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} -x\,e^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b -e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} -x\,e^{-x} - e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -(x+1)\,e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -(b+1)\,e^{-b} + 1$$

$$= 1 - \lim_{b\to\infty} \frac{b+1}{e^b} \overset{\text{l'H}}{=} 1 + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b} = 1$$