Technische Universität Berlin **SoSe 2011**

Fakultät II – Institut f. Mathematik

Doz.: Böse, Gündel vom Hofe, Krumbiegel

Ass.: Kurt, Méndez

Lösung zur Juli-Klausur „Analysis 1 für Ingenieure“ Rechenteil

---

Aufgabe 1 (9 Punkte)

(a) (4 Punkte) Die $pq-$Formel oder die $abc-$Formel führt auf

$$\begin{aligned} z_{1,2} =& \frac{2+i}{2} + \sqrt{\frac{(-(2+i))^2}{4} - 1 - i} \\ =& \frac{2+i}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Da $\sqrt{-1} = \pm i$ ist (oder weil man schon oben $\pm$ vor die Wurzel geschrieben hat), erhält man die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1$.

(b) (5 Punkte) Schreibe die Aufgabe in Polarkoordinaten:

$$z^3 = -8i = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} = 8(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})).$$

Mit dem Satz von de Moivre (bzw. dem Satz über die Berechnung komplexer Wurzeln) gibt es drei Lösungen mit Betrag

$$|z| = 8^{1/3} = 2 \quad \text{und Winkel} \quad \varphi_k = \frac{1}{3}(\frac{3\pi}{2} + k2\pi), \quad k = 0, 1, 2.$$

Man erhält also konkrekt für die Winkel

$$\varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$$

und für die anderen Winkel

$$\varphi_1 = \frac{7\pi}{6}(= \frac{-5\pi}{6}) \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{11\pi}{6}(= \frac{-\pi}{6}).$$

Also

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

Skizze:

Aufgabe 2 (11 Punkte)

(a) (2 Punkte) Da e^{-t} nicht null wird, muss der Faktor $\sin(6t)$ untersucht werden. Es gilt also

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(6t) = 0 \Leftrightarrow 6t = k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

und für $k = 0, 1, 2$ liegen die Nullstellen im angegebenen Intervall $[0, \frac{\pi}{3}]$. Lösung also $t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{6}, t_3 = \frac{\pi}{3}$.

(b) (5 Punkte) Funktionswert in $t_0 = 0$ ist $f(t_0) = 0$.
1. Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned} f'(t) =& - e^{-t}\sin(6t) + 6e^{-t}\cos(6t) \\ =& e^{-t}(6\cos(6t) - \sin(6t)), \end{aligned}$$

also $f'(0) = 6$.
2. Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned} f''(t) =& - e^{-t}(6\cos(6t) - \sin(6t)) + e^{-t}(-36\sin(6t) - 6\cos(6t)) \\ =& e^{-t}(-12\cos(6t) - 35\sin(6t)), \end{aligned}$$

also $f''(0) = -12$.
3. Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned} f'''(t) =& - e^{-t}(-12\cos(6t) - 35\sin(6t)) + e^{-t}(72\sin(6t) - 210\cos(6t)) \\ =& e^{-t}(-198\cos(6t) + 107\sin(6t)), \end{aligned}$$

also $f'''(0) = -198$.
Taylorpolynom 3. Grades: Einsetzen in den Ansatz ergibt

$$T_3(t) = 0 + 6t + \frac{-12}{2}t^2 + \frac{-198}{6}t^3 = 6t - 6t^2 - 33t^3$$

.

(c) (4 Punkte) Einsetzen in die Rechnung aus (b) oder neu ableiten gibt $f'(0) = 6$ und $f'(\frac{\pi}{6}) = -6e^{-\pi/6}$ (1 Punkt).
Da f' stetig ist, und $f'(0) > 0, f'(\frac{\pi}{6}) < 0$, ergibt der Zwischenwertsatz, dass f' auf dem kompakten Intervall $[0, \frac{\pi}{6}]$ eine Nullstelle hat.
Es gilt $T_3'(t) = 6 - 12t - 99t^2$, also $T_3'(0) = 6 (= f'(0)!)$ und $T_3'(\pi/6) = 6 - 2\pi - \frac{11}{4}\pi^2 < 0$.
Anwendung des Zwischenwertsatzes auf T_3' ergibt also in der gleichen Weise wie für f' dass T_3' im angegebenen Intervall eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) (3 Punkte) Wir führen erst eine Partialbruchzerlegung des Nenners durch. Nennerpolynom faktorisieren ergibt $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, also Ansatz:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Koeffizientenvergleich oder Einsetzen oder Zuhaltemethode ergibt $A = -1, B = 1$. Somit erhalten wir für die Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + c = \ln\frac{|x-3|}{|x-2|} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) (4 Punkte) Wir machen die Substitution $u = 1 + x$, also $du = dx$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2+1}\, dx &= \lim_{a\to\infty} \int_{u(0)}^{u(a)} \frac{1}{u^2+1}\, du \qquad \text{(1 Punkt für uneigentliches Integral)}\\ &= \lim_{a\to\infty} \int_1^{a+1} \frac{1}{u^2+1}\, du\\ &= \lim_{a\to\infty} \arctan(u)\Big|_1^{a+1}\\ &= \lim_{a\to\infty} \arctan(a+1) - \arctan(1)\\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:
Substitution $u = 1 + x$, also $du = dx$. Wir berechnen erst das unbestimmte Integral (Stammfunktion).

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x)^2+1}\, dx &= \int \frac{1}{u^2+1}\, du\\ &= \arctan(u) + c\\ &= \arctan(1+x) + c.\end{aligned}$$

Einsetzen der Grenzen ergibt also

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2+1}\, dx &= \lim_{a\to\infty} \arctan(a+1) - \arctan(1)\\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(c) (3 Punkte) Partielle Integration mit $u'(t) = e^{-t}, v(t) = \sin(6t), u(t) = -e^{-t}, v'(t) = 6\cos(6t)$ führt auf

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-t}\sin(6t)dt = -e^{-t}\sin(6t)\Big|_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} (-e^{-t}) 6\cos(6t)dt = 6\int_0^{\pi/6} e^{-t}\cos(6t)dt.$$

Zweite partielle Integration mit $u'(t) = e^{-t}, v(t) = \cos(6t), u(t) = -e^{-t}, v'(t) = -6\sin(6t)$:

$$\begin{aligned}6\int_0^{\pi/6} e^{-t}\cos(6t)dt &= -6e^{-t}\cos(6t)\Big|_0^{\pi/6} - 6\int_0^{\pi/6} 6(-e^{-t})(-\sin(6t))dt\\ &= 6(e^{-\pi/6} + 1) - 36\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-t}\sin(6t)dt.\end{aligned}$$

Auflösen nach dem Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-t}\sin(6t)dt = \frac{6(e^{-\pi/6}+1)}{37}.$$

Alternativer Lösungsweg: Partielle Integration in die andere Richtung, $u'(t) = \sin(6t), u(t) = \frac{-1}{6}\cos(6t), v(t) = e^{-t}, v'(t) = -e^{-t}$. Dann

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-t}\sin(6t)dt =& e^{-t}(\frac{-1}{6})\cos(6t)\Big|_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6}(-e^{-t})(\frac{-1}{6})\cos(6t)dt \\ =& \frac{1}{6}(1+e^{-\pi/6}) - \frac{1}{6}\int_0^{\pi/6} e^{-t}\cos(6t)dt.\end{aligned}$$

und 2. PI $u'(t) = \cos(6t), u(t) = \frac{1}{6}\sin(6t), v(t) = e^{-t}, v'(t) = -e^{-t}$. Dann

$$\begin{aligned}-\frac{1}{6}\int_0^{\pi/6} e^{-t}\cos(6t)dt =& -\frac{1}{36}e^{-t}\sin(t)\Big|_0^{\pi/6} - \frac{1}{36}\int_0^{\pi/6} e^{-t}\sin(6t)dt \\ =& -\frac{1}{36}\int_0^{\pi/6} e^{-t}\sin(6t)dt.\end{aligned}$$

Auflösen nach dem Integral führt wieder auf

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-t}\sin(6t)dt = \frac{6(e^{-\pi/6}+1)}{37}.$$