Technische Universität Berlin **SoSe 2011**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Doz.: Böse, Gündel vom Hofe, Krumbiegel
Ass.: Kurt, Méndez

Lösung zur Juli-Klausur „Analysis 1 für Ingenieure" Verständnisteil

---

Aufgabe 4 (9 Punkte)

(a) (4 Punkte) Die Funktion ist stetig auf den Teilintervallen $]-\infty, \pi/2[$ und $]\pi/2, \infty[$, da die Sinusfunktion sowie jede Polynomfunktion stetig ist. Zu prüfen ist also der Punkt $x = \pi/2$. Dort gilt

$$\lim_{x \nearrow \pi/2} f(x) = \lim_{x \nearrow \pi/2} \sin(x) = \sin(\pi/2) = 1.$$

Nach Definition ist $f(\pi/2) = a\frac{\pi}{2} + b$. Damit die Funktion stetig ist, muss also gelten

$$a\frac{\pi}{2} + b = 1.$$

Damit kann man einen der beiden Parameter eliminieren, also

$$b = 1 - a\frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad a = \frac{2}{\pi}(1 - b).$$

Die Lösung ist also

$$L = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b = 1 - a\frac{\pi}{2}\}, \quad \text{oder} \quad L = \{(a, 1 - a\frac{\pi}{2}), a \in \mathbb{R}\}.$$

(b) (5 Punkte) Die Funktion ist differenzierbar auf den Teilintervallen $]-\infty, \pi/2[$ und $]\pi/2, \infty[$, da die Sinusfunktion sowie jede Polynomfunktion differenzierbar ist. Die Ableitung ist

$$f'(x) = \cos(x), x < \pi/2, \quad \text{bzw.} \quad f'(x) = a, x > \pi/2.$$

Es gilt also

$$\lim_{x \searrow \pi/2} f'(x) = a \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow \pi/2} f'(x) = \lim_{x \nearrow \pi/2} \cos(x) = 0.$$

Daraus folgt $a = 0$. Aus Teil (a) folgt, da jede differenzierbare Funktion stetig ist, dass $b = 1$ sein muss .

Alternativer Lösungsweg: Die Funktion ist differenzierbar auf den Teilintervallen $]-\infty, \pi/2[$ und $]\pi/2, \infty[$, da die Sinusfunktion sowie jede Polynomfunktion differenzierbar ist. Im Punkt $x = \pi/2$ werden links- und rechtsseitige Ableitung betrachtet. Man erhält

$$\lim_{x \searrow \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \lim_{x \searrow \pi/2} \frac{ax + b - (a\frac{\pi}{2} + b)}{x - \pi/2} = \lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{a(x - \pi/2)}{x - \pi/2} = a$$

und wegen der Stetigkeit

$$\lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{\sin(x) - 1}{x - \pi/2} = \lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{\cos(x)}{1} = 0,$$

mit de l'Hospital. Daraus folgt ebenfalls $a = 0$, und dann auch $b = 1$.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

(a) (4 Punkte) (i) Skizze:

Integral bestimmen: entweder geometrisch aus der Skizze (Fläche unter der Kurve):

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)\,dt = 1(-\frac{3\pi}{2} - (-2\pi)) + 1(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}) + 1(2\pi - \frac{3\pi}{2}) = 2\pi$$

oder alternativ durch Berechnen

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)\,dt = \int_{-2\pi}^{\frac{-3\pi}{2}} t\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\,dt + \int_{3\pi/2}^{2\pi} t\,dt = 2\pi$$

oder alternativ mit Periodizität: $\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)\,dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\,dt = 2\pi$.
(ii) Da f eine gerade Funktion ist (wie man aus der Skizze sieht, oder nachrechnet), gilt $f(t) = f(-t)$ für alle t, also folgt sofort die Behauptung. Alternativ kann man eine Substitution $u = -t, du = -dt$ durchführen und erhält

$$\int_0^{2\pi} f(-t)dt = \int_0^{-2\pi} -f(u)du = \int_{-2\pi}^0 f(u)du = \int_0^{2\pi} f(u)du,$$

letzteres wegen der Periodizität.

(b) (5 Punkte) (i) Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^{18} = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$, und $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-a)^{18} = 1 \Leftrightarrow x \in \{a-1, a+1\}$.
(ii) Da f eine gerade Funktion ist, folgt

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{36}{19}.$$

Da g aus f durch Verschiebung um a entsteht, gilt

$$\int_{a-1}^{a+1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{36}{19}.$$

Alternative Lösung: Substitution $u = x - a, du = dx$,

$$\int_{a-1}^{a+1} -(x-a)^{18} + 1\,dx = \int_{-1}^{1} -x^{18} + 1\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{36}{19}.$$

Aufgabe 6 (12 Punkte)

(a) (6 Punkte) (i) Es gilt $\cos(2\pi n) = 1, n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$. Als Produkt zweier konvergenter Folgen ist also $a_n, n \in \mathbb{N}$, auch konvergent, und der Grenzwert ist 0.
(ii) Es gilt $\cos(n\pi) = (-1)^n$, d.h. alterniert zwischen -1 und 1. Die Folge $\sin(\frac{\pi}{2}n)$ nimmt periodisch abwechselnd die Werte $0, 1, 0, -1$ an. Für gerade n ist also $b_n = 0$, für ungerade n ist b_n entweder -1 oder 1. Wir haben also zwei Teilfolgen, von denen die eine gegen 0 konvergiert, und die andere betragsmäßig immer 1 ist. Somit konvergiert die Folge nicht.

(b) (6 Punkte) (i) $a_n = (-1)^{n+1}(\frac{1}{2})^n = -(-\frac{1}{2})^n$. Diese Folge ist nicht monoton, da das Vorzeichen wechselt. Sie ist beschränkt, denn $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie ist konvergent, denn wir wissen dass die geometrische Folge q^n für $|q| < 1$ gegen 0 konvergiert.
(ii) $a_n = -(2)^n$. Die Folge ist monoton (fallend), denn das Vorzeichen ist immer negativ, und $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2^n$ (bzw. $-2^{n+1} \leq -2^n$.. Sie ist nicht beschränkt, da die geometrische Folge für $|q| > 1$ nicht konvergiert und deshalb auch nicht beschränkt ist (oder da 2^n unbeschränkt ist, oder...). Sie ist nicht konvergent, da geometrische Folge mit $|q| > 1$.