Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2011

Doz: Böse/Goßler/Gündel-vom Hofe/Krumbiegel

Ass: Kurt/Méndez/Sète 12. Oktober 2011

Oktober – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 9 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Es sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$P(z) = 2z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 20z - 12\,.$$

(a) Berechnen Sie $P(0)$ und $P(1)$, und beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass P mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

(b) Berechnen Sie $P(2i)$.

(c) Berechnen Sie mittels Polynomdivision $P(z) : (z^2 + 4)$.

(d) Berechnen Sie alle Nullstellen von P.

2. Aufgabe 10 Punkte

(a) Berechnen Sie untenstehendes Integral. Was ist bei der unteren Grenze zu beachten?

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{x+2}}\, dx\,.$$

(b) Berechnen Sie mittels geeigneter Substitution:

$$\int_{0}^{\pi/4} \cos(2x) \cdot (\sin(2x))^2\, dx\,.$$

(c) Berechnen Sie mittels partieller Integration

$$\int_{1}^{2} \ln(x) \cdot \frac{1}{(x+1)^2}\, dx\,.$$

3. Aufgabe 10 Punkte

Es sei

$$f : [0,2[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(2-x) + 4x\,.$$

(a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{-(n-1)!}{(2-x)^n}.$$

(Hinweis: $f^{(n)}$ bezeichnet die $n-$te Ableitung von f).

(b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(c) Zeigen Sie dass für das Restglied R_3 gilt

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{4} \quad \text{für alle } x \in [0,1]\,.$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 10 Punkte

Es seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{-3t}\cos(3t)$$

und

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-3t}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion h monoton fallend ist.

(b) Zeigen Sie, dass f weder gerade noch ungerade ist, und bestimmen Sie alle Nullstellen von f im Intervall $[0, \pi]$.

(c) Bestimmen Sie das Maximum von f im Intervall $[0, \pi]$.

5. Aufgabe 12 Punkte

Für $a \in \mathbb{R}$ sei $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\tan(x)}{x} & x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[\,, \\ a & x = 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie a so, dass f auf ganz $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ stetig ist.

(b) Ist f auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ differenzierbar? Falls ja, berechnen Sie $f'(0)$.

6. Aufgabe 8 Punkte

(a) Es sei

$$f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x).$$

Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass ein $c \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ existiert, welches eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\pi}{4}\cos(x) + \sin\frac{\pi}{4} = 1$$

ist.

(b) Es sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[0,1]$ und differenzierbar auf $]0,1[$ mit $g(1) > g(0)$. Beweisen Sie, dass ein $c \in]0,1[$ existiert, so dass $g'(c) > 0$ erfüllt ist.